6.1

Given: $Re_d = \frac{Ud}{\nu} = 850$

$Re_D = \frac{UD}{\nu} = 90\,000$

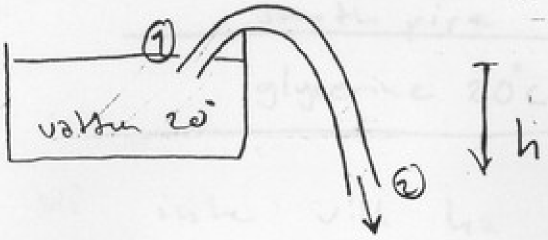
Asked: d

The flow is the same, $\frac{U}{\nu} = \text{constant}$, only the characteristic length varies.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{U}{\nu} = \frac{Re_d}{d} \\ \frac{U}{\nu} = \frac{Re_D}{D} \end{array}\right\} \quad \frac{Re_d}{d} = \frac{Re_D}{D} \Rightarrow d = \frac{Re_d}{Re_D} D$$

$$d = \frac{850}{90\,000} \cdot 0.2 = 0.0019 \text{ m} = 1.9 \text{mm}$$

6.2



$L = 1\,m \quad \varnothing = 2\,mm$

$\mu = 0{,}001\ kg/ms$

$\rho = 998\ kg/m^3$

sökt: a) Q om $h = 0{,}5\ m$

b) h då flödet blir turb

(6.12) ger:

$$\rho g \Delta z = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h_f$$

$$= \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot V}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad V_2^2 + \frac{64 \mu L}{\rho \cdot d^2} V - 2gh = 0$$

$$V_2^2 + 16{,}032\, V - 19{,}62 \cdot h = 0$$

$$V = -\frac{16{,}032}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{16{,}032}{2}\right)^2 + 19{,}62\, h} \qquad (1)$$

a) $h = 0{,}5 \Rightarrow 1) \Rightarrow V = 0{,}59\ m/s$

$$\underline{\underline{Q}} = V \cdot A = 0{,}59 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}002^2}{4} = \underline{1{,}85 \cdot 10^{-6}\ m^3/s}$$

$$Re = \frac{998 \cdot 0{,}59 \cdot 0{,}002}{0{,}001} = 1177 \quad \text{ok } \underline{\text{lam!}}$$

b)

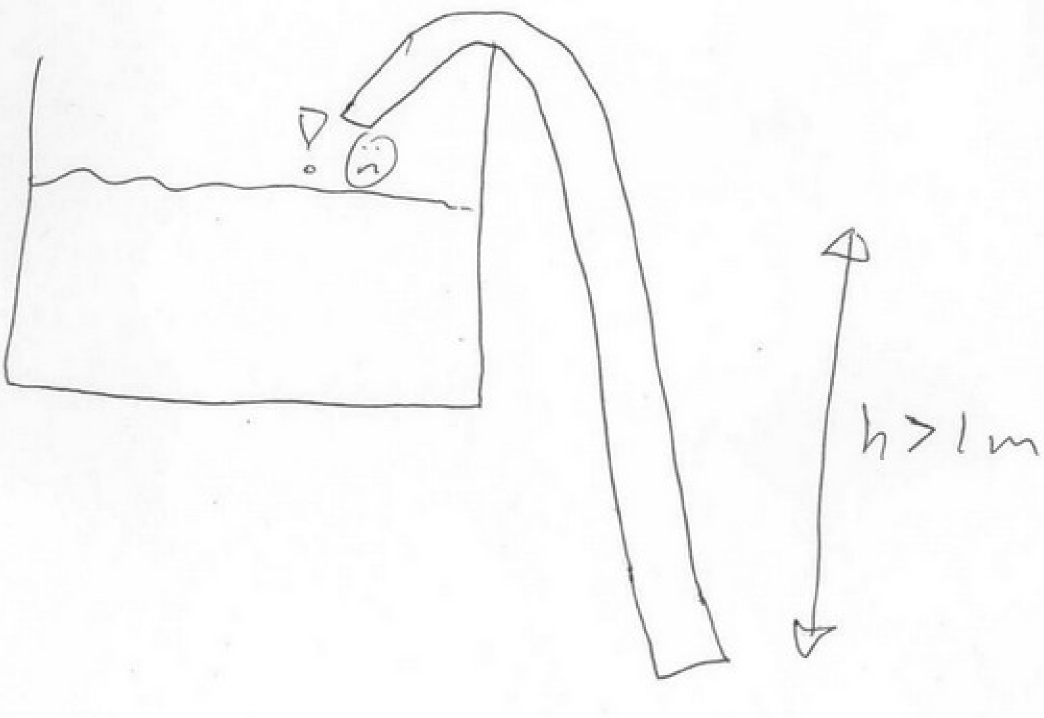
$$2300 > \frac{998 \cdot V \cdot 0{,}002}{0{,}001} \Rightarrow V = 1{,}15\ m/s$$

$$\Rightarrow \text{ur 1)} \quad h = \frac{\left(1{,}15 + \frac{16{,}032}{2}\right)^2 - \left(\frac{16{,}032}{2}\right)^2}{19{,}62} =$$

$$= \frac{1.15^2 + 1.15 \cdot 16.032}{19.62} > 1\ m$$

6.02 forts.

Svar (b) $h > 1$ m betyder att slangen ej räcker till, dvs flödet blir aldrig turbulent i den här slangen



6.3

Given: Water @ 20°C $\Rightarrow$ $\rho = 998\ kg/m^3$, $\mu = 0.001\ kg/ms$
$L = 3.5\ m$, $d = 0.004\ m$, $\Delta z = h_f = 0.3\ m$

Asked: a) Q, laminar?
b) d if $Re_d = 500$

(3.73) $$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + \cancel{h_{turbine}} - \cancel{h_{pump}} + h_{friction} \Rightarrow \Delta z = h_f$$

$V_1 = 0$ $P_1 = P_2$ $V_2 = 0$ large tank no turbine no pump $\| h_f$

a) $Q = VA$ ← unknown

$$h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \quad (6.10)$$
$$f_{lam} = \frac{64}{Re_d} \quad (6.13)$$
$$h_f = \frac{64}{Re_d}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{32\mu}{\rho \cancel{V} d}\frac{L}{d}\frac{V^{\cancel{2}}}{g} = \left[V = \frac{Q}{A}\right] =$$

$$= \frac{32\mu L Q}{\rho d^2 g A} = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho g d^4}$$

$$Q = \frac{\pi \rho g d^4 h_f}{128 \mu L} = 5.3 \cdot 10^{-6}\ m^3/s = 0.019\ m^3/h$$

$$Re_d = \frac{\rho Q d}{A \mu} = \frac{4\rho Q}{\pi d \mu} = 1675 < 2300 \text{ laminar.}$$

b) $$Re_d = 500 = \frac{4\rho Q}{\pi d_2 \mu} \Rightarrow d_2 = \frac{4\rho Q}{\pi Re_d \mu} = 2542.675\, Q \quad (1)$$

$$h_f = \frac{64}{Re_d}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{128\mu L Q}{\pi \rho g d_2^4} \Rightarrow d_2^4 = 4.858 \cdot 10^{-5}\, Q \quad (2)$$

$(1)^4 = (2)$

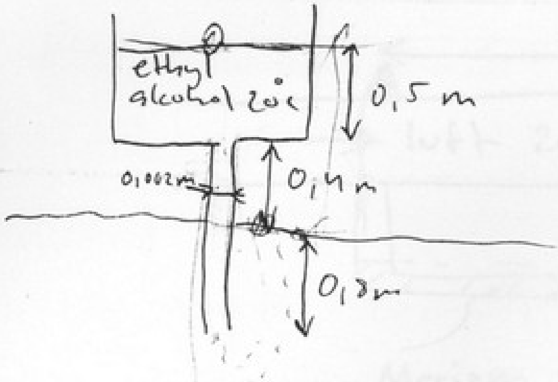
$$(2542.675)^4 Q^4 = 4.858 \cdot 10^{-5} Q$$

$$\frac{(2542.675)^4}{4.858 \cdot 10^{-5}} \cdot Q^3 = 1$$

$$Q = \left(\frac{4.858 \cdot 10^{-5}}{(2542.675)^4}\right)^{1/3} = 1.05 \cdot 10^{-6}\ m^3/s$$

$$d_2 = 2542.675 \cdot 1.05 \cdot 10^{-6} = 0.00267\ m = 2.67\ mm$$

6.4



Finn Q, laminärt?

$\rho = 789 \ kg/m^3$

$\mu = 0{,}0012 \ kg/ms$

$$E.E = P_a + 0 + \rho g z_1 = P_a + 0 + \rho g z_2 + \Delta P_f \Rightarrow$$

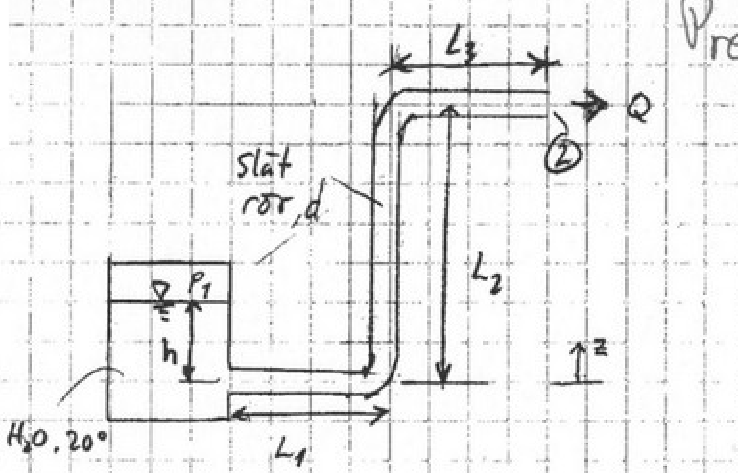
$$\Rightarrow \rho g \Delta z = \Delta P_f = \{\text{antag lam}\} = \frac{128 \cdot \mu \cdot L}{\pi \cdot d^4} Q \quad (6:12)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{789 \cdot 9 \cdot 0{,}9 \cdot \pi \cdot 0{,}002^4}{128 \cdot 0{,}0012 \cdot 1{,}2} = 1{,}90 \cdot 10^{-6} \ m^3/s$$

$$Re = \frac{4 \rho Q}{\pi \mu d} = \frac{4 \cdot 789 \cdot 1{,}90 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 0{,}0012 \cdot 0{,}002} \sim 800$$

Ok lam!

6.5



$Q = 60\ m^3/h$

$L_1 = 60\ m$

$L_2 = 80\ m$

$L_3 = 30\ m$

$h = 10\ m$

$d = 5\ cm$

Sökt: Övertrycket p_1 för att driva flödet

Lösning:

Stationära EE med förluster

(3.71) $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + \rho g h_f$

Lämpligt att välja vätskeytan som ① och utloppet som ②

p_1 är det sökta övertrycket, $p_2 = 0$, ty inget övertryck i den fria strålen

$V_1 = 0$, ty stor tank

V_2 fås genom $Q = V \cdot A$

$\Rightarrow V_2 = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{60 \cdot 4}{3600 \cdot \pi \cdot 0{,}05^2} \approx 8{,}49\ m/s$

$z_1 = h$, $z_2 = L_2$

Darcy-Weisbach (6.10): $h_f = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}$, friktionsfaktorn fås från fig 6.13, Moody diagram

$\Rightarrow$ Behöver $Re_{rör} = \frac{\rho V_2 d}{\mu} = \{A.1\} = \frac{998 \cdot 8{,}49 \cdot 0{,}05}{10^{-3}} \approx 424\,000$

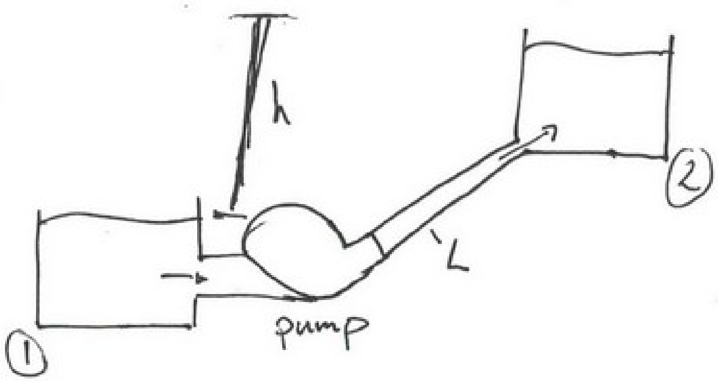
Moody (slät rör) $\Rightarrow f \approx 0.013$

$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g (L_2 - h_1) + \rho f \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{d} \frac{V_2^2}{2} =$

$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 998 \cdot 8{,}49^2}_{36\ kPa} + \underbrace{998 \cdot 9{,}81\,(80 - 10)}_{685\ kPa} + \underbrace{998 \cdot 0{,}013 \frac{(60+80+30)}{0{,}05} \frac{8{,}49^2}{2}}_{1{,}59\ MPa} = 2{,}32\ MPa$

ÖVERTRYCK!

6.6



Given: Water @ 20°c $\Rightarrow$ $\rho = 998\ kg/m^3$, $\mu = 0.001\ kg/ms$
$L = 600m$, $Q = 0.1\ m^3/s$, cast-iron pipe, $\varepsilon = 0.26 \cdot 10^{-3}$
$d = 0.15m$, $\eta_{pump} = 0.75$, $h = 40m$

Ask: pump power, P in hp

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{\rho \left(\frac{Q}{A}\right) d}{\mu} = \frac{\rho Q 4}{\pi d \mu} = 847128$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.26 \cdot 10^{-3}}{0.15} = 0.0017$$

Moody chart $\Rightarrow$ $f = 0.024$

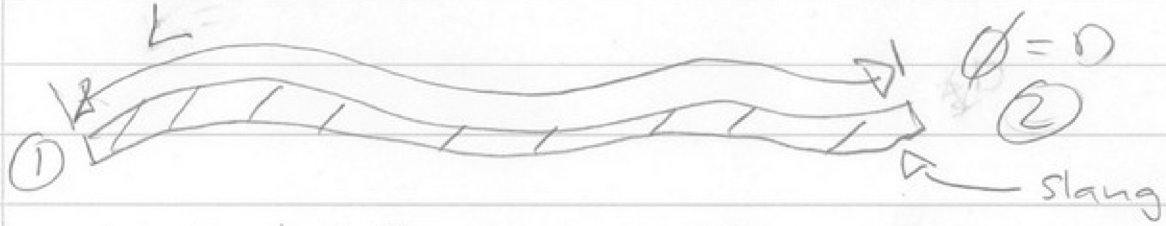
$$(3.73)\ \left(\underbrace{\cancel{\frac{P}{\rho g}}}_{P_{in}=P_{out}} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{in} = \left(\cancel{\frac{P}{\rho g}} + \underbrace{\cancel{\frac{V^2}{2g}}}_{V_{in}=V_{out}} + z\right)_{out} + \cancel{h_{turbin}} - h_{pump} + \underbrace{h_{friction}}_{h_f}$$

$$h_{pump} = \underbrace{z_{out} - z_{in}}_{h} + h_f = \left[h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}\right]_{(6.10)} = 40 + 0.024 \cdot \frac{600}{0.15} \cdot \frac{0.1^2 \, 8}{\pi^2 \, 0.15^{5} \, 9.81}$$

$$= 40 + 156.685 = 196.7\, m$$

$$\eta P = \Delta P \cdot Q \Rightarrow P = \frac{\rho g h_{pump} \cdot Q}{\eta} = 256.749\ kW = \frac{256.746}{746}\ hp = 344\ hp$$

6.7



givet: $L = 30.5\,m$, $D = 0{,}0159\,m$
$\varepsilon / D = 2.8 \cdot 10^{-4}$, Vatten 20°C

a) ifall $p_1 - p_2 = 414\,kPa$, vad blir Q?
b) Hur långt kommer slangen kunna spruta?

Bernoullis utv. elevation mellan (1) och (2)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \rho g h_{loss}$$

anta $v_1 = v_2$, $z_1 = z_2$, ($p_1 - p_2$ = givet)

$$p_1 - p_2 = \rho g h_{loss} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(f \frac{L}{D}\right) \quad (6.79)$$

försumma ev. engångsförluster!

vi får $$v_2 = \left(\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho f \frac{L}{D}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 414 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0159}{998 \cdot 30{,}5}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{f}} \, (\cancel{4})$$

$$= 0{,}658 \frac{1}{\sqrt{f}}$$ måste iterera då $f = \text{func}(Re, \frac{\varepsilon}{D})$

gissa $f = 0{,}0175$, anv. Moody $\Rightarrow Re = 250\,000$

dvs $v = \frac{Re \cdot \mu}{\rho D} = 15{,}75\, m/s$

$\cancel{A}$ ger $v_2 = 0{,}658 \frac{1}{\sqrt{0{,}0175}} = 4{,}97$ m/s

Ok, ifall sanningen ligger nånstans runt 5 m/s så blir

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{998 \cdot 5 \cdot 0.0159}{0{,}001} \approx 80\,000$$

vilket ger (Moody) då ε/D fortfarande $2.8 \cdot 10^{-4}$ ...

$$f = 0{,}020$$

$\cancel{A}$ ger med nya f: $v_2 = 0{,}658 \frac{1}{\sqrt{0{,}020}} = 4{,}65$

då $\frac{5 - 4{,}65}{5} = 0{,}07$ dvs $7\% < 15\%$

så nöjer vi oss där.

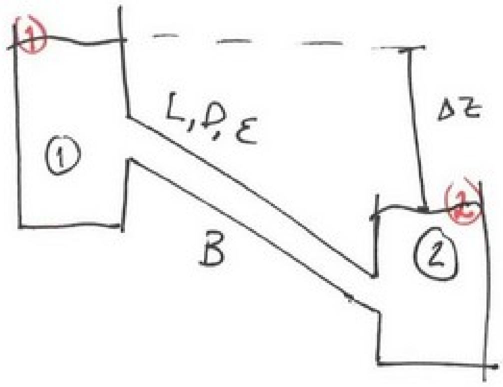
Svar a) $Q = V \cdot A \approx \frac{4{,}65 \cdot \pi \cdot 0{,}0159^2}{4}$

$= \underline{\underline{9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}}}$ (fel i facit?)

Svar b) Ifall man sprutar rakt upp så måste all kinetisk energi övergå till potentiell energi vid maxhöjden, dvs,

$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4{,}65^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{1{,}1 \text{ m}}}$

6.8



Asked: Q in m^3/h

Given: water @ 20°C $\Rightarrow \rho = 998\, kg/m^3$, $\mu = 0.001\, kg/ms$

$L = 4500\,m$, $d = 0.04\,m$, $\Delta z = 100\,m$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$, $V_1 = V_2$

(3.73) $$\left(\cancel{\frac{P}{\rho g}} + \cancel{\frac{V^2}{2g}} + z\right)_1 = \left(\cancel{\frac{P}{\rho g}} + \cancel{\frac{V^2}{2g}} + z\right)_2 + \cancel{h_{turb}} - \cancel{h_{pump}} - h_f$$

$\Delta z = h_f = 100\,m$

(6.10) $$h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow fV^2 = \frac{2h_f d g}{L} \approx 0.01744$$

Guess $f = 0.02$ and iterate

$$V = \left(\frac{0.01744}{0.02}\right)^{1/2} \approx 0.934\, m/s, \quad Re \approx \frac{998 \cdot 0.934 \cdot 0.04}{0.01} \approx 37300$$

$$f_{smooth} \approx 0.0224 \Rightarrow V = \left(\frac{0.01744}{0.0224}\right)^{1/2} \approx 0.883\, m/s \Rightarrow Re \approx 35300$$

$f_{smooth} \approx 0.0226 \Rightarrow \ldots$

$f = 0.0227$, $Re = 35000$, $V = 0.877$, $Q = 0.0011\, m^3/s \approx 4\, m^3/h$

6.9 Given: channel flow, smooth, $h = 0.03m$, $\bar{U} = 2 m/s$

SAE 10 oil @ 20°C $\Rightarrow$ $\rho = 870\ kg/m^3$, $\mu = 0.104\ kg/ms$

Asked: a) centerline velocity, u_{max}

b) headloss, h_f

c) pressure drop per meter $\Delta P/m$

$$D_h = \frac{4A}{P} = 2h = 0.06m, \quad Re_{D_H} = \frac{\rho \bar{U} D_H}{\mu} = \frac{870 \cdot 2 \cdot 0.06}{0.104} = 1004$$

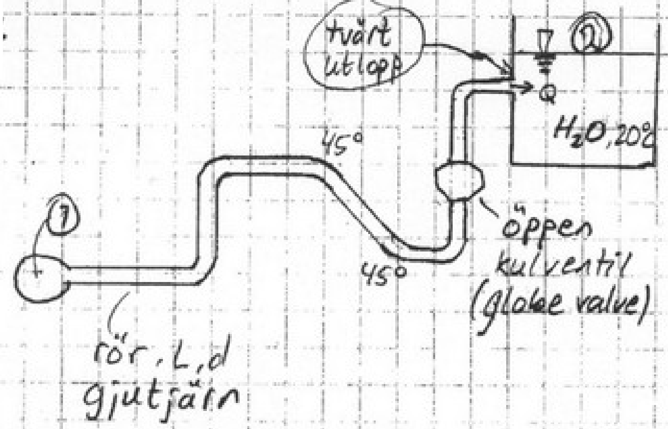
laminar

a) laminar flow $\Rightarrow$ $u_{max} = \frac{3}{2}\bar{u} = 3 m/s$ (6.60)

b) $h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{3 \mu L \bar{U}}{\rho g h^2} = 0.325\ m/m$

c) $\Delta p = \rho g h_f = 2770\ Pa/m$

6.10



$Z_1 = 400\,m$

$Z_2 = 500\,m$

$L = 1200\,m$

$d = 5\,cm$

4st 90° bockade rörkrökar

2st 45° — " —

(flanged long-radius elbows)

Sökt: övertrycket i ①

för att få $Q = 0{,}005\ m^3/s$

Lösning: Stationära EE + empiriska mellan ① och ②

(3.71) $p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \underbrace{\frac{\rho V_2^2}{2}}_{=0,\text{ ty stor tank}} + \rho g z_2 + \rho g(h_{friction} - \underbrace{h_{pump}}_{=0} + \underbrace{h_{turb}}_{=0})$ (1)

övertrycket i ① $= p_1 - p_2$

Hastigheten i röret $= V_1 = \frac{Q \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{0{,}005 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}05^2} = 2{,}55\ m/s$

Kolla Re: {A.1: $\rho = 998\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ \frac{kg}{ms}$} $Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{998 \cdot 2{,}55 \cdot 0{,}05}{10^{-3}} = 127000$

$\Rightarrow \quad \Delta p = \rho g(z_2 - z_1) - \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_{friktion}$ (2)

Friktionsförluster: (6.79) $h_{friktion} = \Delta h_{tot} = \{\text{samma } d\} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{fL}{d} + \Sigma K\right)$ (3)

Moody s.366 {$Re = 127'$, gjutjärn $\Rightarrow \varepsilon = 0{,}26$ mm (tabell 6.1) $\Rightarrow \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0{,}26 \cdot 10^{-3}}{0{,}05} = 0{,}0052$} $\Rightarrow f = 0{,}031$

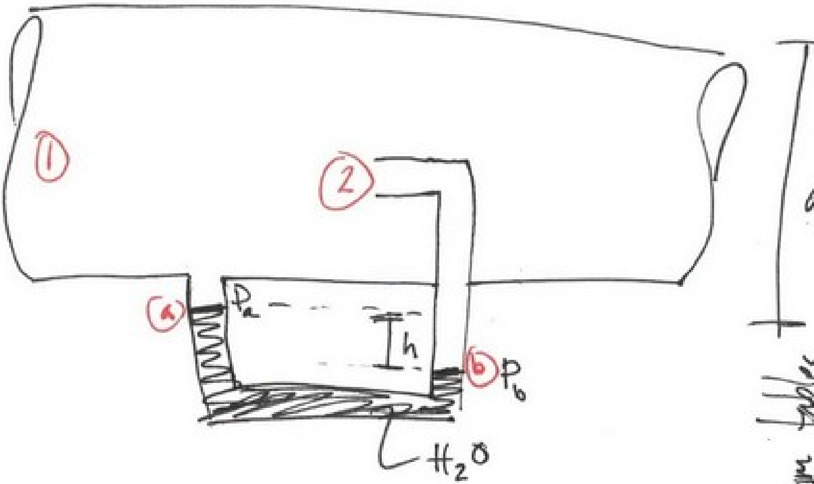
Engångsförluster: (5cm ~ 2in) (tab 6.5 s. 387)

	K		Σ
90°	0,30	×4	1,2
45°	0,20	×2	0,4
globe valve	8,5		8,5
utlopp	~1		1
ΣK			11,1

Se även fig: {6.18b, 6.22}

(3), (2) $\Rightarrow \Delta p = \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho V_1^2}{2}\left(-1 + \frac{fL}{d} + \Sigma K\right) = 3.34\ MPa$

6.11



Given: $d = 0.08\ m$

$h = 0.04\ m$

$T = 20°C$

$P_a = 1\ atm = 101325\ Pa$

from tables:
$\rho_{air} = 1.2\ kg/m^3$ @ $20°C$
$\rho_{H_2O} = 998\ kg/m^3$ @ $20°C$
$\mu_{air} = 1.8 \cdot 10^{-5}\ kg/ms$ @ $20°C$

Asked: a) V_{max} (center of pipe)

b) Q

c) τ_w (smooth)

a) Bernoulli at center of pipe (3.73)

$$\left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + \cancel{z}\right)_{\substack{in \\ =①}} = \left(\frac{P}{\rho g} + \cancel{\frac{V^2}{2g}} + \cancel{z}\right)_{\substack{out \\ =②}} + \cancel{h_{turbine}} + \cancel{h_{friction}} - \cancel{h_{pump}}$$

$z_{in} = z_{out}$ $\quad V_2 = 0$ $\quad$ no turbine/pump, ignore friction loss at center of pipe.

air

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 \qquad (1)$$

Hydrostatic pressure distribution in manometer (3.73)

$$\left(\frac{P}{\rho g} + \cancel{\frac{V^2}{2g}} + z\right)_a = \left(\frac{P}{\rho g} + \cancel{\frac{V^2}{2g}} + z\right)_b$$

no losses! note! the air column is disregarded since $\rho_{air} << \rho_{H_2O}$

$V_a = 0$ $\quad H_2O$ $\quad V_b = 0$

$$P_b = P_a + \rho g \underbrace{(z_a - z_b)}_{h} \qquad (2)$$

note: $P_a = P_1$ and $P_b = P_2$

(2) in (1):

$$\cancel{P_1} + \frac{\rho_{air} V_1^2}{2} = \cancel{P_1} + \rho_{H_2O} g h$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \rho_{H_2O} g h}{\rho_{air}}} = 25.5\ m/s = V_{max}$$

b) Guess: $V_{ave} \approx 0.85 V_{max} = 21.7\ m/s$

$$Re = \frac{\rho V_{ave} d}{\mu} \approx 115\,700$$

Moody for Re and smooth pipe $\Rightarrow f = 0.0175$

$V_{ave} \approx (1 + 1.3\sqrt{f})^{-1} u_{max}$ (6.43) obs! approximation

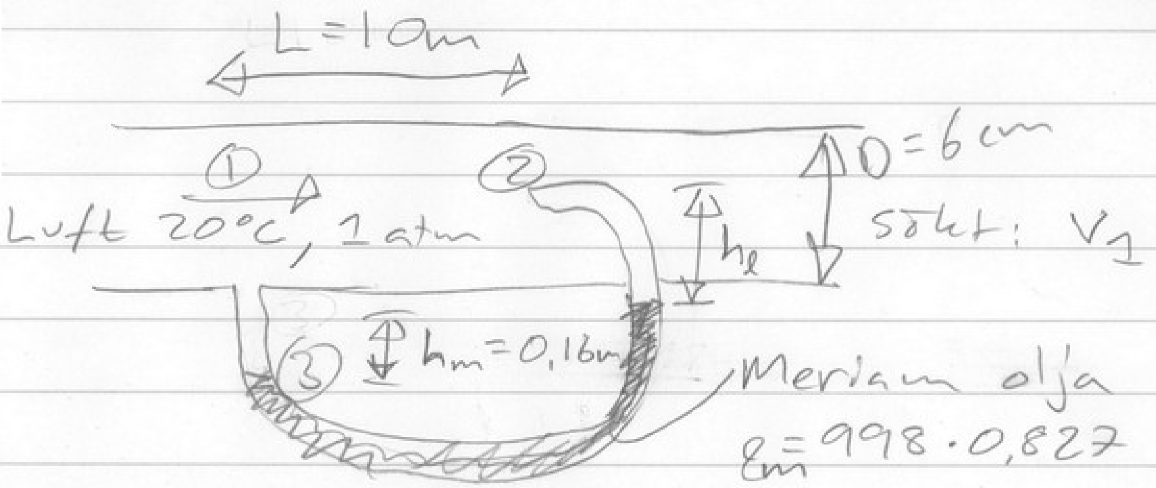
$V_{ave} = 21.76$ ← can be considered converged otherwise iterate from Re.

$$Q = V_{ave} \cdot A = V_{ave} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 21.76 \cdot \frac{\pi \cdot 0.08^2}{4} = 0.109$$

c) $f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$ (6.11)

$$\tau_w = \frac{\rho f V_{ave}^2}{8} = 1.24\ Pa$$

6.12



Bernovilli mellan ① och ② (inkl. tryck förl.)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2$$

medel hastig

$$+ \rho g h_{loss} \quad \text{samt (6.71): } h_{loss} = \frac{V^2}{2g}\frac{fL}{D}$$

anta $z_2 = z_1$, $p_1 = p_{atm}$ (slvet), $V_2 = 0$

$$\Rightarrow p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_{luft} V_1^2 = p_2 + \rho_{luft} g \frac{V_1^2}{2g} f \frac{L}{D} \quad (*)$$

behöver en elevation till!

Räkna hydrostatiskt tryck från ③ till ②

$$p_3 - \rho_m g h_m = p_2 + \rho_{luft} g h_l$$

anta $p_3 \approx p_{atm}$ och $\rho_{luft} \approx 0$

$$\Rightarrow p_2 = -\rho_m g h_m + p_{atm} \quad (*) \text{ blir nu}$$

$$\frac{1}{2}\rho_{luft} V_1^2 = -\rho_m g h_m + \frac{1}{2}\rho_{luft} V^2 \left(f \frac{L}{D}\right)$$

Om $Re \approx 200\,000$ så är $V/v_{max} = V/V_1 = 0{,}86$ enligt White sid 363. Vi får då

$$V_1 = \left(\frac{2 \cdot \varrho_m g h_m}{\varrho_{luft}(1 - 0{,}86^2 f \frac{L}{D})} \right)^{1/2} \qquad (\ast\ast)$$

Eftersom $f = func(Re, \varepsilon/D)$ måste vi iterera m. hj. av Moody-diagram

gissa $V = 50$ m/s $\Rightarrow Re = \frac{1{,}2 \cdot 50 \cdot 0{,}06}{1{,}8 \cdot 10^{-5}}$

$= 200\,000$ Moody ger då $f = 0{,}015$ för släta väggar.

$(\ast\ast)$ ger då $V_1 = \left(\frac{2 \cdot 998 \cdot 0{,}827 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}16}{1{,}2 (1 - 0{,}015 \cdot \frac{10}{0{,}06} 0{,}86^2)} \right)^{1/2}$

$= 50{,}4$ m/s

Vilket ger $V \approx 0{,}86 \cdot 50{,}4 = 43{,}4$ m/s

Eftersom $\frac{50 - 43{,}4}{43{,}4} \approx 0{,}152 > 15\%$

bör vi iterera ännu en gång ...

Gissa $V = 43{,}4$ m/s $\Rightarrow Re = 174\,000$
$\Rightarrow f = 0{,}016 \Rightarrow (\ast\ast)\ V_1 = 47{,}1$ m/s

$\therefore$ Hastigheten i mitten av röret är ungefär $\underline{\underline{47 \text{ m/s}}}$

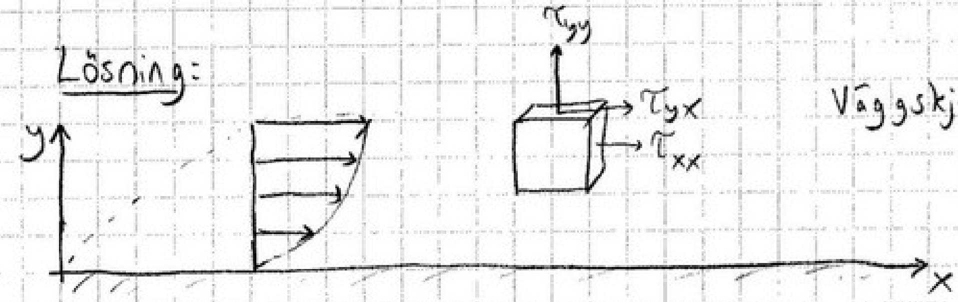
6.13

Givet: Följande experimentella data har uppmätts för $u(y)$ (turbulent) för luft @ $75\,°F$, $P = P_{at}$ nära en slät plan vägg
$\left(T_{Celsius} = \frac{5}{9}(75-32) = 23{,}9\,°C\right)$

y [m]	$6{,}35 \cdot 10^{-4}$	$8{,}89 \cdot 10^{-4}$	$1{,}19 \cdot 10^{-3}$	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}65 \cdot 10^{-3}$
u [m/s]	15,61	16,52	17,31	17,55	18,01

Sökt: ⓐ Väggskjuvspänningen
ⓑ $u(y = 0{,}00558)$

Lösning:



Väggskjusp. $= \tau_{yx}(y=0)$

För turb. strömning $\tau_{yx} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$ (ekv. 9-20b häftet turbulens)

men vi vet också att $\tau_w = \rho u^{*2}$ (enklare att använda)

→ låt oss finna u^* (friktions hastigheten)

Vi antar att de givna punkterna är i overlap lagret där log-lagen gäller (och kollar sedan om detta är sant)

log-lagen = $\{ @\ \nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ m^2/s \}$

$$\frac{u}{u^*} = 2{,}44 \ln\left(\frac{y u^*}{1{,}5 \cdot 10^{-5}}\right) + 5$$

OBS! Log lagen gäller ej vid väggen

för $y = 6{,}35 \cdot 10^{-4}$ [m] $\quad u = 15{,}61$ $\left[\frac{m}{s}\right]$

log logen

in i miniräknaren ger

$$\frac{15{,}61}{u^*} = 2{,}44 \ln\left(\frac{6{,}35 \cdot 10^{-4}\, u^*}{1{,}5 \cdot 10^{-5}}\right) + 5 \qquad u^* = 1{,}088 \text{ [m/s]}$$

Vi kollar om vi är i log-området för att se om uträkningen är sann

$$y^+ = y\frac{u^*}{\nu} = 6{,}35 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1{,}088}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 46 \quad > 30 \quad \text{dvs log området}$$

$$\tau_w = \rho u^{*2} = 1{,}2 \cdot 1{,}088^2 = \underline{\underline{1{,}42 \text{ Pa}}}$$

b) $u(y = 0{,}00558) = ?$

Lösning: antar log-området (och kollar sedan om det är så)

log lagen $\quad u = u^* \, 2{,}44 \cdot \ln\left(\frac{y\, u^*}{1{,}5 \cdot 10^{-5}}\right) + 5$

$$\{u^* = 1{,}088,\ y = 0{,}00558\} \Rightarrow u = 1{,}088 \cdot 2{,}44 \ln\left(\frac{0{,}00558 \cdot 1{,}088}{1{,}5 \cdot 10^{-5}}\right) + \ldots$$

$$= \underline{\underline{20{,}94}} \text{ [m/s]}$$

Är vi i log området? $y^+ = y \cdot \frac{u^*}{\nu} = 0{,}00558 \cdot \frac{1{,}088}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 405 > 30$

$\Rightarrow$ log områd[e]

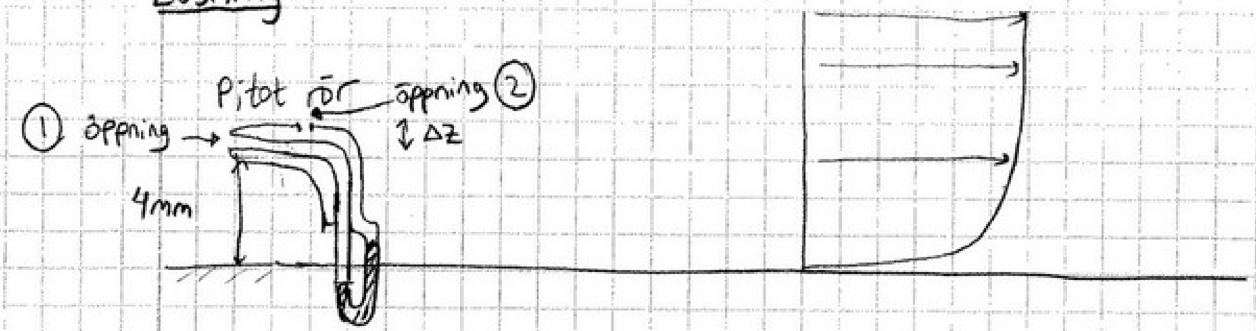
6.14

Luft strömmar utefter en plan yta, varvid ett turbulent gränsskikt utvecklas. Ett totaltrycksrör (Pitotrör) hålles på avståndet 4 mm från väggen och man avläser att totaltrycket i denna position är 36 Pa högre än det statiska trycket i friströmmen. Beräkna väggskjuvspänningen. (10p)

@20°C

Sökt: $\tau_w = ?$

Lösning:



Bernoulli ekv. för Pitot röret

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \underbrace{\frac{\rho v_2^2}{2}}_{\text{kan lösa ut } V_2} = 36 [P$$

$v_1 = 0$ stagnations punkt (Pitot röret är redan fyllt med luft)

Δz mycket liten

p_2 = statiska trycket i friströmmen

kan lösa ut V_2 (friströms-hastigheten vid y=4mm

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_{luft(20°)}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36}{1,2}}$$

$$= 7,75 [m/$$

$$\tau_w = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$

Reynolds stress, svåra att bestämma /modellera

därför anv. vi istället =

$$\tau_w = \rho u^{*2}$$

Vi antar att y=4 mm ligger i overlap lagret, där log-lagen gäller (och kontrollerar detta sedan)

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{log lagen} \\ @ \nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \end{array} \right\} = \frac{u}{u^*} = 2,44 \ln\left(\frac{y u^*}{1,5 \cdot 10^{-5}}\right) + 5$$

i punkten 4 mm upp i gränsskicktet, där hastigheten är k.

$$\frac{7{,}75}{u^*} = 2{,}44 \ln\left(\frac{0{,}004 \cdot u^*}{1{,}5 \cdot 10^{-5}}\right) + 5$$

in i miniräknaren ger

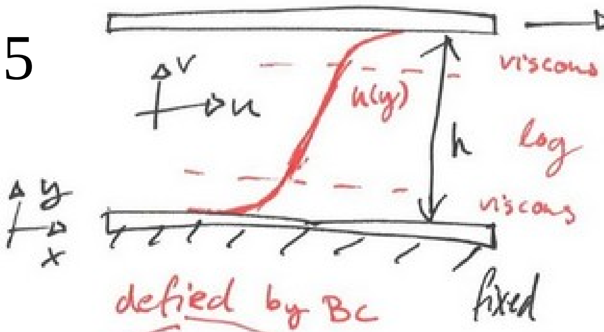
$\rightarrow u^* = 0{,}46$ m/s

Vi kontrollerar att vi är i området där log-lagen gäller:

$$y^+ = y \frac{u^*}{\nu} = 0{,}004 \cdot \frac{0{,}46}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 123 > 30 \quad \text{ok!}$$

$$\tau_w = \rho u^{*2} = 1{,}2 \cdot 0{,}46^2 = \underline{\underline{0{,}26 \text{ Pa}}}$$

6.15



Given: $h = 0.03\,m$

H_2O @ 20°C ⇒ $\rho = 998\ kg/m^3$, $\nu = 1.005 \cdot 10^{-6}$

log law valid

τ = constant = 15 Pa

Asked: V

defied by BC

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) + B \qquad (6.28) \quad \text{log law}$$

κ: 0.41 $\quad \nu$: 1.0005e-6 $\quad B$: 5.0

u^*: unknown

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{15}{998}} = 0.123\ m/s$$

BC: $u(0) = 0$, $u(h) = V$ } in viscous region and not appropriate for log law

Since shear is constant the channel centerline will have half of the velocity of the moving wall:

$u(h/2) = V/2$ in log region!

$$\frac{V}{2u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^* h}{2\nu}\right) + B = \frac{1}{0.41} \ln\left(\frac{0.123 \cdot 0.03}{2 \cdot 1.005 \cdot 10^{-6}}\right) + 5 = 23.3$$

$$\frac{V}{2u^*} = 23.3 \Rightarrow V = 2 \cdot 23.3 \cdot u^* = 5.72\ m/s$$

6.16

6.41

Givet: Vatten vid 20°C strömmar i ett rör.

$D_{rör} = 0{,}09$ m

Fullt utbildad strömning

$u_{max} = 10$ [m/s]

Sökt: (a) Q (volym flödet)

(b) $\overline{u}$ (medel hastigheten i röret)

(c) τ_w (väggs skjuvspänningen)

(d) ΔP (Tryck fallet) då rör längden är 100 meter

Lösning:

hastighetsprofilen ser likadan ut i x-led (fullt utbildad)

$$Q = \int_A u \cdot dA = \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$u(r)$ kan hittas för laminär strömning (se övning 10) men svårare att hitta för turbulent strömning pga att $\overline{v'^2}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{u'u'}$ är okända (se övning 11)

Vi kollar om laminärt / turbulent

$$Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \qquad \bar{u} = 0{,}82\ U_{max} \text{ turbulent}$$
$$\bar{u} = 0{,}5\ U_{max} \text{ laminärt}$$

Om laminärt $\bar{U} \Rightarrow Re = \frac{0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}09}{1{,}005 \cdot 10^{-6}} = 447\ 762$

> 2300 dvs turbulent!

$\bar{u}$ för turbulent strömning i Re =

$$Re = \frac{0{,}82 \cdot 10 \cdot 0{,}09}{1{,}005 \cdot 10^{-6}} = 734\ 000$$

För turb. strömning kan vi approximera flödet i ~~hela~~ gränsskicktet med log-lagen

$$Q = \int_0^R \underbrace{\left[u^*\left(\frac{1}{k} \ln\left(\frac{y u^*}{\nu}\right) + B\right)\right]}_{u \text{ från log-lagen}} \cdot 2\pi r \cdot dr$$

sätt $y = R - r$ (avstånd fr. väggen för rör)

Denna integral är redan löst i White (ekv. 6.33, White)

$$Q = \frac{1}{2} u^* \left(\frac{2}{k} \ln\left(\frac{R u^*}{\nu}\right) + 2B - \frac{3}{k}\right) \cdot \underbrace{\pi R^2}_{\text{Arean}}$$

Om $k = 0{,}41$ och $B = 5$ fås (White ekv. 6,34) =

$$Q = u^* \left(2{,}44 \ln\left(\frac{R u^*}{\nu}\right) + 1{,}34\right) \cdot \underbrace{\pi R^2}_{\text{Arean}}$$

u^* är den enda obekanta. Vi ställer upp log-lagen för den givna kända punkten ($r = 0$, $u = U_{max}$) → löser ut u^*

(8)

log lagen för denna punkt:

$$\frac{10}{u^*} = 2{,}44 \ln\left(\underbrace{\frac{0{,}045 \cdot u^*}{1{,}005 \cdot 10^{-6}}}_{\frac{(R-r)\cdot u^*}{\nu}}\right) + 5 \quad \Rightarrow u^* = 0{,}35 \ [m/s]$$

$$Q = 0{,}35\left(2{,}44 \ln\left(\frac{0{,}045 \cdot 0{,}35}{1{,}005 \cdot 10^{-6}}\right) + 1{,}34\right) \cdot \pi \cdot 0{,}045^2 = \underline{\underline{5{,}5 \cdot 10^{-2}}} \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

(b) korrelation för turb. strömning

$$\bar{u} = 0{,}82 \cdot u_{max} = 0{,}82 \cdot 10 = 8{,}2 \ [m/s]$$

men eftersom vi vet Q kan vi räkna ut det exakta $\bar{u}$ för vårt fall

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-2}}{\pi \cdot 0{,}045^2} = 8{,}64 \ [m/s]$$ stämmer ganska bra

(c) $\tau_w = \rho u^{*2} = 998 \cdot 0{,}35^2 = 122 \ [Pa]$

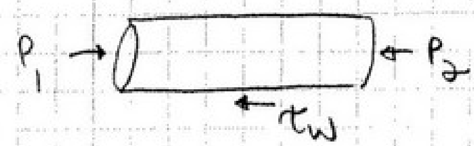
(d) $\Delta P = ?$ om $L = 100 \ [m]$

Då fullt utbildad, stat strömning. Newtons andra

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\substack{0 \\ \text{stat}}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\substack{\text{fullt} \\ \text{utbildad}}} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \underbrace{\cancel{v}}_{v=0} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \underbrace{\cancel{w}}_{w=0}\right) = \rho \underbrace{a}_{0} = \Sigma f$$

$$\Rightarrow \Sigma f = 0$$

Kraftbalans



$f_{pressure} = f_{friktion}$

$$(P_1 - P_2)\,\pi R^2 = \tau_w \cdot \underbrace{2\pi R \cdot L}_{\text{mantel arean}}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\tau_w \cdot 2\cancel{\pi} R \cdot L}{\cancel{\pi} R^2} = \frac{122 \cdot 2 \cdot 0{,}045 \cdot 100}{0{,}045^2} = \underline{542} \ [kPa]$$