

**MTF052 STRÖMNINGSMEKANIK**

**Tentamen onsdagen den 9 januari 2019, kl 08:30-13:30, "Maskin"-salar  
(OBS! 5-timmarstenta)**

Hjälpmedel: **Teoridelen:**  
Inga hjälpmedel tillåtna

**OBS!** Före tentamen skall hjälpmedlen lämnas på en av vakten anvisad plats. Lösningarna på teoriuppgifterna inlämnas vid godtycklig tidpunkt, varefter hjälpmedlen får användas vid lösandet av problemen.

**Problemdelen:**

Tillåtna hjälpmedel är läroboken ("Fluid Mechanics", Frank M. White), Data och Diagram, matematiska tabeller, Chalmersgodkänd räknare, av institutionen utgivna formelsamlingar och material, föreläsninganteckningar - dock **ej** lösta exempel.

Lösningar: Meddelas via Canvas torsdag 10 januari 2019.

Betygsgränser: Maximal poängsumma är 85 p. Betyg  $3 \geq 34p$ ,  $4 \geq 51p$ ,  $5 \geq 68p$

Tentaresultat: Meddelas senast onsdag 30 januari 2019

Granskning: Måndag 4 februari 2019, kl 11.45-12.45

Läraren besöker  
tentamenssalar: ca kl. 9.30 och ca kl. 12.

Göteborg den 17 december 2018

Alf-Erik Almstedt, examinator, tel. 031-772 1407

**MEKANIK OCH MARITIMA VETENSKAPER**

Chalmers tekniska högskola  
412 96 Göteborg

Besök: Hörsalsvägen 7 A  
Telefon: 031-772 37 87  
E-post: erik.sjodin@chalmers.se  
Webb: www.chalmers.se

Chalmers tekniska högskola AB  
Organisationsnummer 556479-5598



**Teoriuppgifter**

T1. Definiera Reynolds tal och visa att det är dimensionslöst. (2p)

T2. Härled kontinuitetsekvationen på integralform för en fix kontrollvolym genom att utgå från Reynolds transportteorem:

$$\frac{d}{dt}(B_{syst}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}) dA$$

Förklara även vad kontinuitetsekvationen betyder fysikaliskt. (4p)

T3. Hur kan kontinuitetsekvationen på formen:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

förenklas om vi har;

- a. endimensionella in- och utlopp?
- b. stationär strömning?
- c. inkompressibel och instationär strömning? (3p)

T4. Navier-Stokes ekvation i x-riktningen ser ut som följer:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}$$

Förklara de ingående termerna. Under vilken förutsättning gäller förenklingen av den generella differentialekvationen för impuls till Navier-Stokes ekvation? (4p)

T5. Varför vill man uttrycka fysikaliska ekvationer på dimensionslös form? (2p)

T6. Vid fullt utbildad turbulent rörströmning kan hastighetsprofilen approximeras med sjundedelsregeln;

$$u = u_{max} \left( \frac{y}{R} \right)^{1/7} \quad \text{där } y = R - r$$

Varför kan inte denna formel användas direkt för att beräkna väggskjuvspänningen? (2p)

T7. Förklara begreppet Reynolds dekomposition samt varför man gärna vill tidsmedelvärdera ekvationerna vid turbulent strömning. Förklara också "The closure problem" (problemet att sluta ekvationssystemet) som då uppstår. (3p)

- T8. a. Hur förhåller sig den turbulenta viskositeten  $\nu_t$  (även kallad  $\varepsilon_m$  i Turbulenskompendiet) storleksmässigt till den kinematiska viskositeten  $\nu$  i det viskösa underskiktet respektive i det fullt turbulenta området?  
b. Hur varierar totala skjuvspänningen  $\tau$  med y-koordinaten i dessa områden?  
c. Vilken matematisk form har hastighetsprofilen i de bägge områdena? (4p)

- T9. För laminär strömning längs en plan platta är hastighetsprofilen självlikformig. Vad betyder det? (2p)

- T10. Varför är golfbollar "dimplade" och inte släta? (2p)

- T11. Ljudhastigheten i en godtycklig fluid ges av

$$a = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right)^{\frac{1}{2}}$$

Härled utifrån detta samband ett uttryck för ljudhastigheten i en perfekt gas med konstanta ämnesstorheter, som funktion av temperaturen. Utnyttja isentropsambandet

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k$$

(4p)

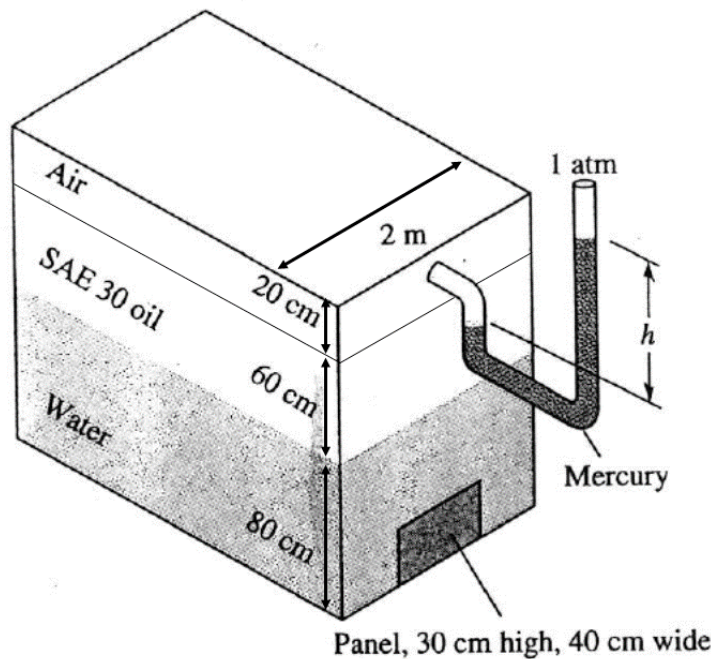
- T12. Förklara med hjälp av en figur hur trycket och hastigheten varierar för olika mottryck i ett konvergent munstycke vid utströmning från en stor behållare med trycket  $P_0$ . Vad gäller för massflödet vid olika mottryck? (3p)

**Problemuppgifter**

P1. En lodrät stång skall dras upp ur ett hål som innehåller SAE50-olja av 20°C. Kraften som krävs för att dra upp stången kommer att bero på hastigheten. Vid vilken hastighet blir den erforderliga kraften 300N? Bortse från starteffekter och ändeffekter. Skillnaden i statiskt tryck och stångens egen tyngd får också försummas. Stångens längd i kontakt med oljan är 5 m, dess diameter är 11 cm och hålets diameter är 12 cm.

Ledning: Från kraften kan skjuvspänningen bestämmas vilket underlättar bestämmandet av integrationskonstanten om det nu av en händelse skulle bli några sådana. (10p)

P2. I en sluten tanks ena vägg finns en 30 cm hög och 40 cm bred platta, se figur. Den utåtriktade hydrostatiska nettokraften på denna platta är 8 450 N. Beräkna kvicksilverpelarens höjd,  $h$ . Temperaturen på alla fluider är 20°C. Lufttrycket i behållaren får anses vara konstant.



(10p)

P3. En kylvattenledning har längden 320 m och diametern 400 mm. Genom ledningen, vilken kan betraktas som rak. Strömmar 1100 m<sup>3</sup>/tim. Trycket vid inloppet är 150 kPa och vid utloppet 120 kPa. Utloppet ligger 4.5 m under inloppet. Man måste öka kylvattenmängden med 40% och överväger att byta utledningen mot en grövre. Kan detta undvikas genom att enbart öka inloppstrycket i den befintliga ledningen till 170 kPa? Svaret skall motiveras.

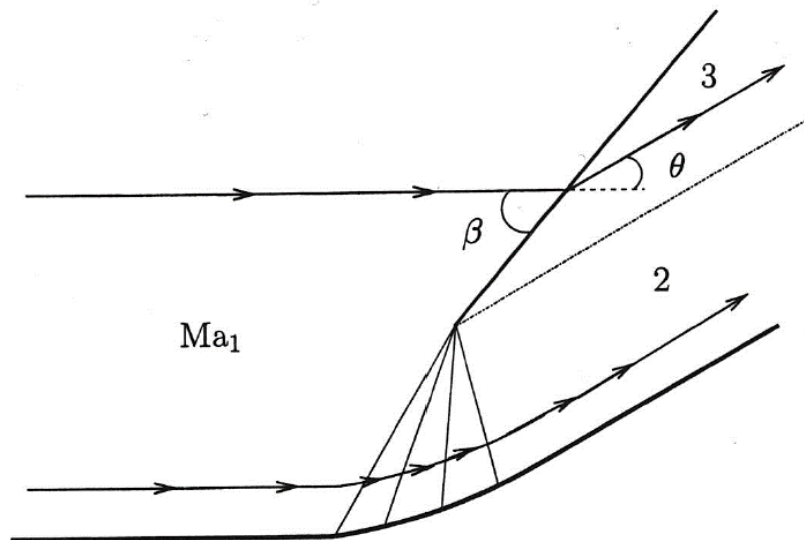
(10p)

P4. Forskare inom turbulens har länge varit ense om att det krävs en mycket stor vindtunnel för att kunna reda ut vad som egentligen händer inom ett turbulent gränsskikt. En av de viktigaste och svåraste storheterna man vill mäta upp är väggskjuvspänningen. Det kanske mest noggranna sättet att mäta upp väggskjuvspänning är att använda en optisk metod för att mäta upp hastighetsprofilen nära väggen (Laser-Doppler Anemometri, LDA). Den minsta optiska mätvolym man kan skapa idag är ca  $50 \mu\text{m}$  stor. Anta att man någonstans i anslutning till Chalmers har byggt en ny, stor vindtunnel som har en mätsträcka som är 40 m lång. En plan platta som är just 40 m lång har monterats och friströmshastigheten är 10 m/s. Lufttrycket är 1 atm och temperaturen  $20^\circ\text{C}$ . Omslag kan antas ske i plattans framkant.

- Hur tjockt är gränsskiktet på plattan efter 40 m?
- Anta att LDA utrustningen mäter i en punkt som ligger i centrum av mätvolymen. Klarar man (40 m nedströms) att få in en mätpunkt så nära väggen som  $y^+ = 1$ ? Vid beräkningen får log-lagen antas gälla vid gränsskiktets ytterrand.

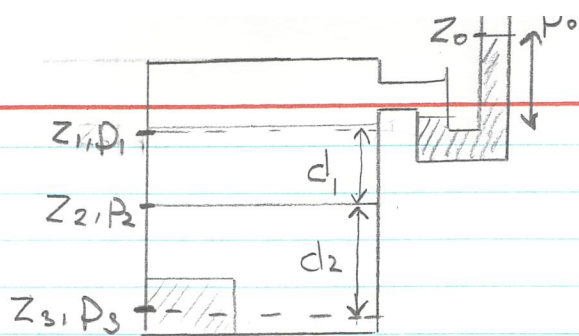
(10p)

P5. Luft som strömmar med  $Ma_1 = 3$  närmar sig en krök med vinkeln  $\theta = 30^\circ$  enligt figur.



- Beräkna stötvinkeln  $\beta$  om stöten är svag.
- Beräkna machtalet i sektionerna 2 och 3.
- Vad beror skillnaderna i machtal mellan sektionerna 2 och 3 på?

(10p)



Trycket varierar linjärt över plattan; medeltrycket blir då lika med trycket i mitten  $p_3$

$$\begin{aligned} \rho_v &= 998 \text{ kg/m}^3 & d_1 &= 0.6 \text{ m} \\ \rho_0 &= 891 \text{ kg/m}^3 & d_2 &= 0.65 \text{ m} \\ \rho_{Hg} &= 13550 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$p_0 - p_1 = -\rho_{Hg} g \underbrace{(z_0 - z_1)}_h \quad (1)$$

$$p_1 - p_2 = -\rho_0 g \underbrace{(z_1 - z_2)}_{d_1} \quad (2)$$

$$p_2 - p_3 = -\rho_v g \underbrace{(z_2 - z_3)}_{d_2} \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow$$

$$p_0 - p_3 = -\rho_{Hg} g h - \rho_0 g d_1 - \rho_v g d_2 \quad (4)$$

$$h = \frac{p_0 - p_3 + g(\rho_0 d_1 + \rho_v d_2)}{-\rho_{Hg} g}$$

$$\text{överttrycket: } p_3 - p_0 = \frac{F}{A} \quad (5)$$

$$(5) \text{ i } (4) \Rightarrow$$

$$h = \frac{-F/A + g(\rho_0 d_1 + \rho_v d_2)}{-\rho_{Hg} g}$$

$$= \underline{\underline{0.44 \text{ m}}}$$

givet:  $L = 5 \text{ m}$ ,  $D = 12 \text{ cm}$ ,  $d = 11 \text{ cm}$ ,  $F = 300 \text{ N}$ , oil SAE 50

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 902 \text{ kg/m}^3 \\ \mu = 0,86 \text{ kg/m}\cdot\text{s} \\ \nu = 9,534 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

sökt:  $v$

$$F = \tau \cdot A = \tau \cdot \pi \cdot d \cdot L \Rightarrow \tau = \frac{-F}{\pi \cdot d \cdot L} = -173,6 \text{ N/m}^2 \left( = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

N.S. i cyl. koordin. z-rikt. E.7 + E.3 + E.4

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

stationärt:  $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ ; "lång kanal":  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = 0$ ,  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0$

försurningstrycket:  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow 0 = g_z + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{g_z}{\nu} r$$

integrera:

$$r \frac{dv_z}{dr} = -\frac{g_z}{\nu} \frac{r^2}{2} + C_1 \Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = -\frac{g_z r}{\nu 2} + \frac{C_1}{r} \quad (1)$$

integrera:

$$v_z = -\frac{g_z r^2}{\nu 4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (2)$$

R.V. 1:  $r = 0,055 \text{ m}$   $\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = \tau \Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{\tau}{\mu}$  (OBS! negativt)

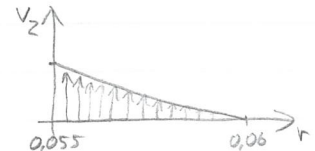
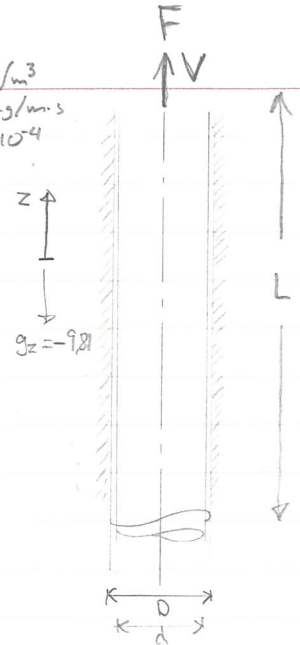
$$(1) \Rightarrow \frac{\tau}{\mu} = -\frac{g_z r}{\nu 2} + \frac{C_1}{r} \Rightarrow C_1 = 0,055 \left( \frac{\tau}{\mu} + \frac{g_z \cdot 0,055}{\nu \cdot 2} \right)$$

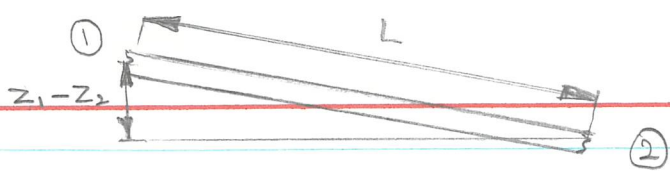
R.V. 2:  $r = 0,06 \text{ m}$   $v_z = 0$

$$(2) \Rightarrow 0 = -\frac{g_z r^2}{\nu 4} + C_1 \ln r + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{g_z \cdot 0,06^2}{\nu \cdot 4} - 0,055 \left( \frac{\tau}{\mu} + \frac{g_z \cdot 0,055}{\nu \cdot 2} \right) \ln 0,06$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{g_z}{\nu 4} (0,06^2 - r^2) + 0,055 \left( \frac{\tau}{\mu} + \frac{g_z \cdot 0,055}{\nu \cdot 2} \right) \ln \frac{r}{0,06}$$

$$v_z(r=0,055) = 0,84 \text{ m/s}$$





Givet:  $d = 0,4 \text{ m}$   $p_1 = 150 \text{ kPa}$   
 $L = 320 \text{ m}$   $p_2 = 120 \text{ kPa}$   
 $z_1 - z_2 = 4,5 \text{ m}$   
 $t = 10^\circ \text{C}$

$$Q_a = 1100 \text{ m}^3/\text{h} = \frac{11}{36} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_b = 1,4 Q_a$$

Lösning: Bs utvidgade ekv (3.68b)  
 eller (3.78) eller (6.24)

$$p_1 + \rho \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta p_f$$

$$V_1 = V_2, \alpha_1 = \alpha_2$$

$$a) \Delta p_f = p_1 - p_2 + \rho g (z_1 - z_2) = (1,5 - 1,2) \cdot 10^5 + \rho g \cdot 4,5 \quad (1)$$

Kylvatten,  $t = 10^\circ \text{C} \Rightarrow \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$   
 $\nu = 1,31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\Delta p_f = 0,3 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9,81 \cdot 4,5 = 0,74 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(6.20a):

$$\Delta p_f = f \frac{L}{d} \rho \frac{V^2}{2} = f \frac{L}{d} \frac{\rho Q^2 L^2}{2 (\pi d^2)^2} \Rightarrow$$

$$f = \Delta p_f \frac{\pi^2 d^5}{8 L \rho Q^2} = \frac{0,74 \cdot 10^5 \cdot \pi^2 \cdot 0,4^5}{8 \cdot 320 \cdot 10^3 \cdot 11^2} \cdot 36^2$$

$$f_a = 0,0314$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{Q \cdot d \cdot 4}{\pi d^2 \nu} = 7,5 \cdot 10^5$$

Moody-diagram, Fig 6.13, s. 318  $\Rightarrow$   
 $f$  är oberoende av  $Re$ .

$$b) \because f_b = f_a \text{ enl. ovan}$$

$$\Delta p_f = f_b \frac{L}{d} \rho \frac{V_b^2}{2} = 146 \text{ kPa} \quad (2)$$

Det räcker alltså inte att öka trycket  $p_1$  till 170 kPa.

Enl. (2) krävs  $\Delta p_f = 146 \text{ kPa}$  men en ökning till 170 kPa ger endast 94 kPa.



P1 a) Anta att strömmen är turbulent från start.

White (7.1b)

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,16}{Re_x^{1/2}}$$

$$Re_x = \frac{U \cdot x}{\nu} \Rightarrow$$

$$\delta = 0,16x \cdot \left(\frac{U \cdot x}{\nu}\right)^{-1/2}$$

$$\begin{cases} x = 40 \text{ m} \\ U = 10 \text{ m/s} \\ \nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \Rightarrow \delta \approx 0,56 \text{ m}$$

Mer noggrann: Omslag eller  $x_{kr}$

$$Re_{x_{kr}} = 5 \cdot 10^5 \quad \text{White s. 399}$$

$$\Rightarrow x_{kr} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot \nu}{U} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 15 \cdot 10^{-6}}{10} = 7,5 \cdot 10^{-1} = 0,75 \text{ m}$$

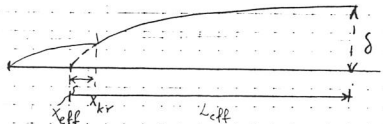
Tjockleken av det laminära GS är då (7.1a)

$$\frac{\delta_{lam}}{x_{kr}} = \frac{5,0}{Re_{x_{kr}}^{1/2}} \Rightarrow \delta_{lam} = \frac{5,0}{\sqrt{5 \cdot 10^5}} \cdot 0,75 = 0,005 \text{ m}$$

"Startpunkten" för det turbulenta GS är då

$$\frac{\delta_{lam}}{x_{eff}} = \frac{0,16}{Re_{x_{eff}}^{1/2}} \Rightarrow x_{eff} = \left(\frac{U}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{\delta_{lam}}{0,16}\right)^2 \approx 0,02 \text{ m}$$

$\Rightarrow$  Ellar 40 -  $x_{kr} + x_{eff}$  ska alltså det turb. GS räknas ut = plottans bakkant



$$\Rightarrow \delta(\text{ändkanten}) = L_{eff} \cdot \frac{0,16}{Re_{x_{eff}}^{1/2}} = 0,16 \cdot 39,22 \cdot \left(\frac{0,3922}{15 \cdot 10^{-6}}\right)^{1/2} \approx 0,55 \text{ m}$$

P1 b) Anta att log-lagen gäller ända ut till GS-kanten

$$\frac{U}{u^*} = 2,44 \ln \frac{U \cdot \delta}{\nu} + 5,0 \quad (7.35)$$

Illitera fram ut:

$$1) \text{ Om } \delta = 0,557 \text{ m} \quad (\text{antaget turb. P. början,})$$

$$\Rightarrow u^* = 0,3557 \text{ m/s}$$

$$2) \text{ Om } \delta = 0,550 \text{ m} \quad (\text{korrigering för laminärt})$$

$$\Rightarrow u^* = 0,3561 \text{ m/s}$$

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu}$$

$$y = 25 \mu\text{m} \quad (\text{centrum av mätrosgren}) \Rightarrow$$

$$1) y^+ = 0,585$$

$$2) y^+ = 0,586$$

Alltså ok.

(hänvisningarna gäller White, upplaga 5)

Lösning Givet,  $Ma_2 = 3$ ,  $\theta = 30^\circ$ , luft  $\Rightarrow k = 1,4$

a) Stötvinkeln  $\beta$  fås genom (9,8c),  $\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{Ma_1^2 (k + \cos 2\beta) + 2}$

<sup>svag</sup> stöt: Startgissning från fig 9,23 på  $50^\circ$  och iterering ger  $\beta = 52^\circ$

b)  $Ma$  i sektion 3 (sned stöt)

(9,87)  $Ma_{n1} = Ma_1 \sin \beta = 3 \cdot \sin 52^\circ = 2,364$

över stöten (9,83f),  $Ma_{n3}^2 = \frac{(k+1)Ma_{n1}^2 + 2}{2kMa_{n1}^2 - 0,4} \Rightarrow$

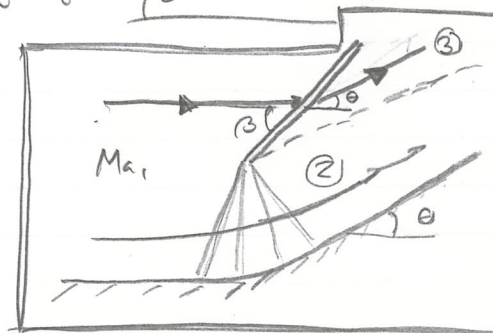
$\Rightarrow Ma_{n3} = 0,5270$

(9,82)  $\Rightarrow Ma_3 = \frac{Ma_{n3}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0,5270}{\sin 22} = \underline{\underline{1,407}}$

$Ma$  i sekt 2, (Prandtl-Meyer-kompression)

$Ma_1 = 3$ , [B5]  $\Rightarrow \omega(Ma_1 = 3) = 49,76$ . Vi har en avlänkning på  $30^\circ \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = -30^\circ \Rightarrow \omega_2 = 19,76^\circ$

[B5]  $\Rightarrow$   $Ma = 1,75$  ger  $\omega = 19,27$   
 $Ma = 1,80$  ger  $\omega = 20,73$ . Interpolering ger  $\underline{\underline{Ma_2 = 1,767}}$



c) Skillnaden i mach-tal beror på att kompressionen sker isentropiskt i Prandtl-Meyer-området och icke-isentropiskt över stöten.