CHALMERS 2015-12-17

MTF052 **STRÖMNINGSMEKANIK**

Tentamen torsdagen den 7 januari 2016, kl 08:30-13:30, M-huset
(OBS! 5-timmarstenta)

Hjälpmedel: **Teoridelen:**
Inga hjälpmedel tillåtna

OBS! Före tentamen skall hjälpmedlen lämnas på en av vakten anvisad plats. Lösningarna på teoriuppgifterna inlämnas vid godtycklig tidpunkt, varefter hjälpmedlen får användas vid lösandet av problemen.

Problemdelen:
Tillåtna hjälpmedel är läroboken ("Fluid Mechanics", Frank M. White), Data och Diagram, matematiska tabeller, Chalmersgodkänd räknare, av institutionen utgivna formelsamlingar och material, föreläsningsanteckningar - dock **ej** lösta exempel.

Lösningar: Anslås på institutionens anslagstavla fredag 8 januari 2016.

Betygsgränser: Maximal poängsumma är 85 p. Betyg 3 $\geq$34p, 4 $\geq$51p, 5 $\geq$68p

Tentaresultat: Meddelas senast onsdag 27 januari 2016

Granskning: Torsdag 28 januari 2016, kl 11.45-12.45
Fredag 29 januari 2016, kl 11.45-12.45

Läraren besöker salen: ca kl 9:30 och ca kl 12

Göteborg den 17 december 2015
Alf-Erik Almstedt, tel 772 1407

TILLÄMPAD MEKANIK
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg

Besök: Hörsalsvägen 7 B, 4 tr
Telefon: 031-772 37 87
E-post: ullt@chalmers.se
Webb: www.chalmers.se/am

Chalmers tekniska högskola AB

Teoriuppgifter

T1. Vad är kavitation och varför uppstår detta ibland i en strömmande vätska? (2p)

T2. Härled kontinuitetsekvationen på integralform för en fix kontrollvolym genom att utgå från Reynolds transportteorem

$$\frac{d}{dt}\left(B_{syst}\right)=\frac{d}{dt}\left(\int_{cv}\beta\rho dv\right)+\int_{cs}\beta\rho\left(\mathbf{V}_r\cdot\mathbf{n}\right)dA$$

Förklara även vad kontinuitetsekvationen betyder fysikaliskt. (4p)

T3. Vilka förenklingar av kontinuitetsekvationen på differentialform

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

kan göras om strömningen är

a) stationär?
b) inkompressibel? (2p)

T4. Strömningsmotståndet, F_D, för en omströmmad kropp kan delas upp i ett formmotstånd, F_{Dn}, och ett friktionsmotstånd, F_{Dt}. Visa utgående från Reynolds likformighetslag att formmotståndet kan skrivas som

$$F_{Dn}=C_{Dn}(\mathrm{Re})\cdot A_p\cdot\frac{\rho U^2}{2}$$

där motståndskoefficienten C_{Dn} enbart är en funktion av Reynolds tal. (5p)

T5. Hur förhåller sig den turbulenta viskositeten ε_m storleksmässigt till den kinematiska viskositeten ν i det viskösa underskiktet respektive i det fullt turbulenta området? Hur varierar totala skjuvspänningen τ med y-koordinaten i dessa områden? Vilken matematisk form har hastighetsprofilen i de bägge områdena? (4p)

T6. Visa att statiska trycket är oberoende av avståndet från väggen i ett laminärt tvådimensionellt gränsskikt. Utgå från NS i y-led på dimensionslös form:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}\right)$$

Följande storleksuppskattningar gäller och behöver ej visas:

$\bar{u}\sim 1$, $\bar{v}\sim\bar{\delta}$ och $\mathrm{Re}\sim\dfrac{1}{\bar{\delta}^2}$ (4p)

T7. För ett laminärt gränsskikt på en plan platta är

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

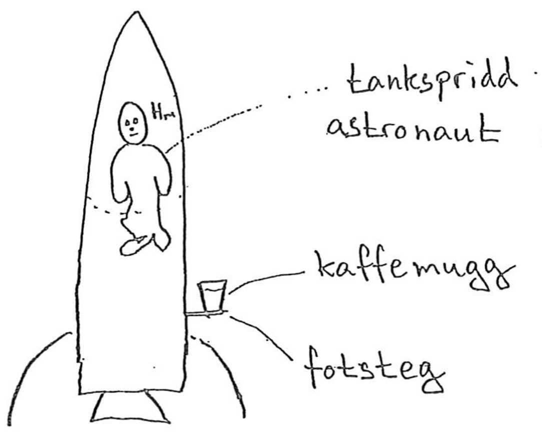
Bestäm det totala friktionsmotståndet, D, för en sida av plattan. Denna kraft uttrycks ofta m.h.a. en dimensionslös motståndskoefficient, C_D. Bestäm C_D uttryckt m.h.a. Re_L, d.v.s med hjälp av Reynoldstalet i plattans bakkant. (4p)

T8. Visa hur hastighetsprofilen, dess första- och andraderivata samt tryckgradienten förändras i ett gränsskikt utefter en krökt yta vid avlösning. (4p)

T9. Härled ljudhastigheten för en godtycklig fluid. Under vilket antagande ska tryckderivatan beräknas? (6p)

Problem

P1. En tankspridd astronaut glömmer sin kaffemugg på fotsteget till sin raket. Beräkna trycket i kaffet i botten av muggen



a) i startögonblicket om muggen accelereras rakt upp tillsammans med raketen med accelerationen 7 g

b) om muggen ramlar av forsteget i startögonblicket och precis börjar falla (antag att muggen inte välter utan faller upprättstående)

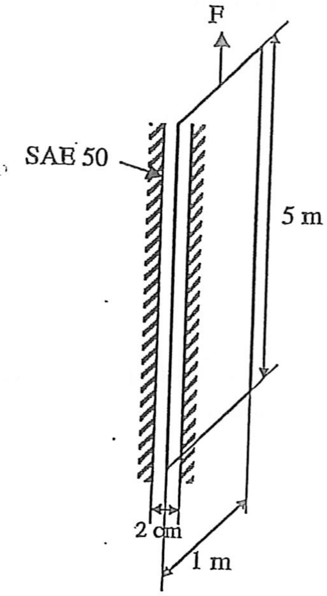
c) om muggen har fallit så länge att den uppnått konstant fallhastighet (luftmotstånd och tyngdkraft balanserar varandra).

Kaffets höjd i muggen är 5 cm och omgivningens tryck är 100 kPa (10p)

P2. En plan tunn plåt skall dras upp ur ett vertikalt hålrum som innehåller SAE50-olja av 20°C. Vid vilken hastighet blir den erforderliga kraften 850 N?

Bortse från änd- och kanteffekter samt starteffekter. Skillnaden i statiskt tryck, och plåtens egen tyngd (dock ej tyngdkraftens inverkan på oljan) får också försummas. Plåtens längd och bredd är 5 m resp 1 m och dess tjocklek är försumbar. Hålrummets vidd är 2 cm, se figur. Man kan dessutom anta att det finns lika mycket olja på båda sidor om plåten, dvs. plåten är centralt placerad i hålrummet.

Ledning: Från kraften kan skjuvspänningen bestämmas vilket underlättar bestämmandet av integrationskonstanter om det nu av en händelse skulle bli några sådana.



(10p)

P3. De flesta villor har ett expansionskärl placerat på vinden. För att byta ett sådant kärl önskar man tömma det på vatten. "Hävertprincipen" och en 8.5 m lång plastslang med innerdiametern 8.0 mm utnyttjas. Slangen leds via takluckan ut i en hängränna. Höjdskillnaden mellan vattenytan i expansionskärlet och slangens utlopp i rännan är 0.90 m. Slangens inlopp ligger 0.10 m under vattenytan i kärlet. Arbetet görs på sommaren så att pannan är avstängd och vattentemperaturen är 20°C.

Bestäm vattenflödet per minut i slangen. Antag att slangens skrovlighet ε är 0.001 mm. (10p)

P4. Med vilken hastighet faller regnet en vindstilla dag om regndropparna får anses sfäriska med en diameter på 4 mm? (10p)

P5. Luft strömmar genom en konvergent-divergent dysa med cirkulärt tvärsnitt. Luften tillföres från en mycket stor behållare där trycket 0,7 MPa och temperaturen 30°C råder. Trycket utanför dysans mynning är 0,1 MPa. Dysan har i minsta sektionen diametern 0,5 cm och i mynningen 1,0 cm. Beräkna massflödet genom dysan och utred om en stöt förekommer i dysans divergerande del.

(10p)

MTF052 Strömn. mek 7/1-16

(2.8)
~~(2.13)~~ $\nabla p = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$

Ingen relativrörelse mellan elementen

$\nabla p = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})$

z-axeln uppåt $\Rightarrow \dfrac{dp}{dz} = \rho(-g-a)$ (1)

$p_2 = 100$ kPa, vi söker p_1

a) $a = 7g$

$(1) \Rightarrow \dfrac{dp}{dz} = \rho(-8g)$

$p_2 - p_1 = -8\rho g(z_2 - z_1)$

$p_1 = p_2 + 8\rho g(z_2 - z_1) =$

$= 100 \cdot 10^3 + 8 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 = \underline{\underline{103{,}9 \text{ kPa}}}$

b) $a = -g$

$(1) \Rightarrow \dfrac{dp}{dz} = \rho \cdot 0$

$\Rightarrow p = \text{konst} \Rightarrow p_1 = p_2 = \underline{\underline{100 \text{ kPa}}}$

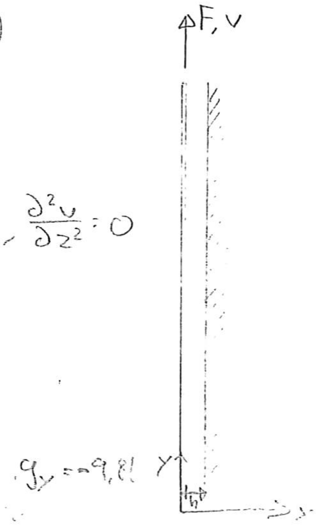
c) $V = \text{konst} \Rightarrow a = 0$

$(1) \Rightarrow \dfrac{dp}{dz} = -\rho g$

$p_1 = p_2 + \rho g(z_2 - z_1) = \underline{\underline{100{,}5 \text{ kPa}}}$

(samma som om muggen stått still, dvs hydrostatiskt, om man bortser från vakeffekter. I verkligheten minskar trycket p_2 också pga avlösning)

givet: $L = 5$ m, $b = 1$ m, $h = 1$ cm, $F = 850$ N, oil SAE 50 $\begin{cases} \mu = 0{,}86 \text{ kg/m·s} \\ \nu = 9{,}554 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases}$
sökt: V



$F = -\tau \cdot A = -\tau \cdot 2 \cdot L \cdot b \Rightarrow \tau = \dfrac{-F}{2 \cdot L \cdot b} = -85 \text{ N/m}^2 \quad \left(= \mu \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$

N.S. i y-riktn. (endast 2-dim strömning)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

stationärt: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; "lång kanal": $u = 0$, $w = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

försumma trycket: $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow 0 = g_y + \nu \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{g_y}{\nu}$

integrera:

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{g_y}{\nu} x + C_1$ (1)

integrera:

$v = -\dfrac{g_y}{\nu}\dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ (2)

$g_y = -9{,}81$

R.V. 1: $x = 0$ $\quad \mu \dfrac{\partial v}{\partial x} = \tau \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\tau}{\mu}$

$(1) \Rightarrow \dfrac{\tau}{\mu} = -\dfrac{g_y}{\nu} x^{0} + C_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{\tau}{\mu}$

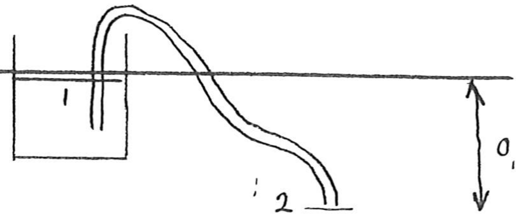
R.V. 2: $x = 0.01$ m $\quad v = 0$

$(2) \Rightarrow 0 = -\dfrac{g_y}{\nu}\dfrac{0.01^2}{2} + \dfrac{\tau}{\mu} 0.01 + C_2 \Rightarrow C_2 = \dfrac{g_y}{\nu}\dfrac{0.01^2}{2} - \dfrac{\tau}{\mu} 0.01$

$\Rightarrow v = -\dfrac{g_y}{\nu}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\tau}{\mu} x + \dfrac{g_y}{\nu}\dfrac{0.01^2}{2} - \dfrac{\tau}{\mu} 0.01 = \dfrac{g_y}{\nu \cdot 2}(0.01^2 - x^2) + \dfrac{\tau}{\mu}(x - 0.01)$

$v(x=0) = 0.47$ m/s

Bernoullis utvidgade (3.68b):



$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta p_f$$

$p_1 = p_2$, $V_1 \simeq 0$, $z_1 - z_2 = 0{,}9$ $\Rightarrow$

$0{,}9\,\rho g = \frac{\rho V_2^2}{2} + \Delta p_f$ där $\Delta p_f = f\,\frac{\rho V^2}{2}\,\frac{L}{d}$ (6.10b) ($\cancel{6.30b}$), $f = f(Re, \frac{\varepsilon}{d})$, $\frac{\varepsilon}{d} = 1{,}2$

$\therefore$ $\boxed{0{,}9\,g = \frac{V_2^2}{2}\left(1 + f\frac{L}{d}\right)}$ (1)

$\nu = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $L = 8{,}5\,m$, $d = 0{,}008\,m$

Antag laminärt, ($\cancel{6.46}$) $\Rightarrow$ (6.13) $\Rightarrow$

$f = \frac{64}{Re} \Rightarrow 0{,}9\,g = \frac{V_2^2}{2}\left(1 + \frac{L}{d}\cdot\frac{64\nu}{d\,V_2}\right)$

$\Rightarrow$ $V_2 = 1{,}73\ m/s \Rightarrow Re = 13840 > 2300$

$\therefore$ Turbulent strömn, antagandet var fel.

Använd tex (6.64a)

$$\frac{1}{f^{1/2}} \approx -1{,}8 \log\left[\frac{6{,}9}{Re_d} + \left(\frac{\varepsilon/d}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right] \quad (2)$$

Iterera; $Re = 13840$, (2) $\Rightarrow f = 0{,}0285$

Ins i (1) $\Rightarrow V_2 = 0{,}752 \Rightarrow Re = 6017$

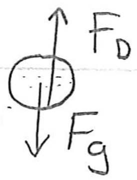
(2) $\Rightarrow f = 0{,}0358$, (1) $\Rightarrow V_2 = 0{,}673 \Rightarrow Re =$

etc $\Rightarrow V_2 = 0{,}66\ m/s$ $Re = \frac{Vd}{\nu} = 5285 >$

$$Q = V_2\,\frac{\pi d^2}{4} = 3{,}32 \cdot 10^{-5}\ m^3/s$$

Svar: $Q = 2{,}0$ liter/min

(Det går lika bra att använda Moody-diagr
ε/d är litet $\Rightarrow$ $\approx$ slätt rör.



kraftjämvikt: $\uparrow$ $F_D - F_g = 0$ (1)

$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_l A U^2 = \frac{1}{2} C_D \rho_l \pi r^2 U^2$ (2)

$F_g = mg = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3} g$ (3)

sätt in (1) och (2) i (3)

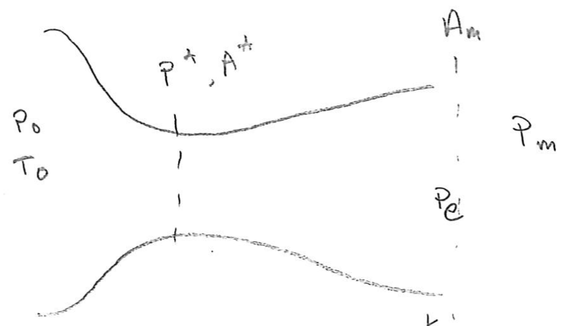
$$\frac{1}{2} C_D \rho_l \pi r^2 U^2 - \rho_v \frac{4\pi r^3}{3} g = 0$$

$$U = \sqrt{\frac{2\rho_v 4 r g}{\rho_l\, 3\, C_D}} \quad (4)$$

$Re = \frac{UD}{\nu}$ (5) gissa $C_D = 0{,}4$ (4) $\Rightarrow U = 10{,}4\ m/s$

(5) $\Rightarrow$ $Re = 2750$ Fig 5,3 $\Rightarrow C_D = 0{,}4$ OK! $U = 10\ m/s$

LÖSNING:



(9.32): $\dfrac{p^*}{p_0} = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0{,}5283$

$\Rightarrow$ $p^* = 0{,}5283 \cdot 0{,}7 \cdot 10^6 = 0{,}3698 \cdot 10^6$ MPa

$p^* > p_m = 0{,}1$ MPa $\Rightarrow$ strömn. kritisk

(9.1?): $\dot{m}_{max} = \dfrac{0{,}6847\, p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} =$

$= \dfrac{0{,}6847 \cdot 0{,}7 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}005^2}{\sqrt{287 \cdot 303}} \approx$

$\approx 0{,}0320$ kg/s

Anta att ingen stöt inträffar i den divergerande delen. Då gäller enl. (9.45) och (9.28 b):

$\dfrac{A_m}{A^*} = \dfrac{1^2}{0{,}5^2} = 4 = \dfrac{1}{Ma_m} \dfrac{(1+0{,}2 Ma_m^2)^3}{1{,}728}$

Tabell B1 $\Rightarrow$ $Ma_m = 2{,}94$

Med detta Ma-tal i mynningen skulle mynningstrycket, p_e bli:

$\dfrac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{1}{2}(k-1) Ma_m^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \approx 33{,}56$

$\Rightarrow p_e \approx 0{,}0209$ MPa

Men $p_e < p_m = 0{,}1$ MPa och alltså fås en stöt i dysan (Se fig. 9.12)