**CHALMERS** 2015-10-21

**MTF052** **STRÖMNINGSMEKANIK**

**Tentamen fredagen den 30 oktober 2015, kl 08:30-13:30, M-huset**
**(OBS! 5-timmarstenta)**

Hjälpmedel: **Teoridelen:**
Inga hjälpmedel tillåtna

**OBS!** Före tentamen skall hjälpmedlen lämnas på en av vakten anvisad plats. Lösningarna på teoriuppgifterna inlämnas vid godtycklig tidpunkt, varefter hjälpmedlen får användas vid lösandet av problemen.

**Problemdelen:**
Tillåtna hjälpmedel är läroboken ("Fluid Mechanics", Frank M. White), Data och Diagram, matematiska tabeller, Chalmersgodkänd räknare, av institutionen utgivna formelsamlingar och material, föreläsningsanteckningar - dock **ej** lösta exempel.

Lösningar: Anslås på institutionens anslagstavla måndag 2 november 2015

Betygsgränser: Maximal poängsumma är 85 p. Betyg 3 $\geq$34p, 4 $\geq$51p, 5 $\geq$68p

Tentaresultat: Meddelas senast fredag 20 november 2015

Granskning: Måndag 23 november 2015, kl 11.45-12.45
Tisdag 24 november 2015, kl 11.45-12.45

Läraren besöker salen: ca kl 9:30 och ca kl 12

Göteborg den 21 oktober 2015
Alf-Erik Almstedt,

**Lärare under tentamen: Sebastian Samuelsson, 073-0780610**

**TILLÄMPAD MEKANIK**
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg

Besök: Hörsalsvägen 7 B, 4 tr
Telefon: 031-772 37 87
E-post: ullt@chalmers.se
Webb: www.chalmers.se/am

Chalmers tekniska högskola AB
Organisationsnummer 556479-5598

**Teoriuppgifter**

T1. Vad är kavitation och varför uppstår detta ibland i en strömmande vätska? (2p)

T2. Härled kontinuitetsekvationen på integralform för en fix kontrollvolym genom att utgå från Reynolds transportteorem

$$\frac{d}{dt}\left(B_{syst}\right)=\frac{d}{dt}\left(\int_{cv}\beta\rho dv\right)+\int_{cs}\beta\rho\left(\mathbf{V}_r\cdot\mathbf{n}\right)dA$$

Förklara även vad kontinuitetsekvationen betyder fysikaliskt.

(4p)

T3. Vilka förenklingar av kontinuitetsekvationen på differentialform

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

kan göras om strömningen är

a) stationär?
b) inkompressibel? (2p)

T4. Strömningsmotståndet, $F_D$, för en omströmmad kropp kan delas upp i ett formmotstånd, $F_{Dn}$, och ett friktionsmotstånd, $F_{Dt}$. Visa utgående från Reynolds likformighetslag att formmotståndet kan skrivas som

$$F_{Dn}=C_{Dn}(\mathrm{Re})\cdot A_p\cdot\frac{\rho U^2}{2}$$

där motståndskoefficienten $C_{Dn}$ enbart är en funktion av Reynolds tal. (5p)

T5. Hur förhåller sig den turbulenta viskositeten $\varepsilon_m$ storleksmässigt till den kinematiska viskositeten $\nu$ i det viskösa underskiktet respektive i det fullt turbulenta området? Hur varierar totala skjuvspänningen $\tau$ med $y$-koordinaten i dessa områden? Vilken matematisk form har hastighetsprofilen i de bägge områdena? (4p)

T6. Visa att statiska trycket är oberoende av avståndet från väggen i ett laminärt tvådimensionellt gränsskikt. Utgå från NS i y-led på dimensionslös form:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}\right)$$

Följande storleksuppskattningar gäller och behöver ej visas:

$$\bar{u}\sim 1,\ \bar{v}\sim\bar{\delta}\ \text{och}\ \mathrm{Re}\sim\frac{1}{\bar{\delta}^2}$$ (4p)

T7. För ett laminärt gränsskikt på en plan platta är

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Bestäm det totala friktionsmotståndet, $D$, för en sida av plattan. Denna kraft uttrycks ofta m.h.a. en dimensionslös motståndskoefficient, $C_D$. Bestäm $C_D$ uttryckt m.h.a. $\mathrm{Re}_L$, d.v.s med hjälp av Reynoldstalet i plattans bakkant. (4p)

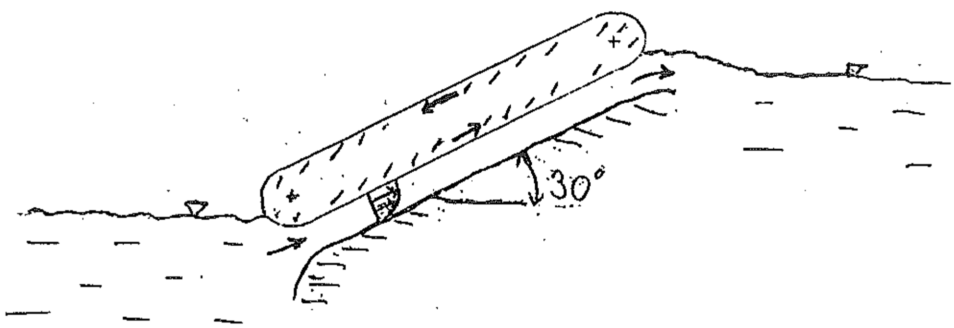
T8. Visa hur hastighetsprofilen, dess första- och andraderivata samt tryckgradienten förändras i ett gränsskikt utefter en krökt yta vid avlösning. (4p)

T9. Härled ljudhastigheten för en godtycklig fluid. Under vilket antagande ska tryckderivatan beräknas? (6p)

**Problem**

P1. En nytenterad teknolog avnjuter ett välförtjänt glas hallonsaft on the rocks (med en isbit i). Isbiten är kubisk med kanten 30 mm och flyter med en platt sida uppåt. Med den skarpa blick som infinner sig efter en tentamen ser hon att 2,7 mm av isbiten sticker upp ovanför saftytan. Hon inser att nästa tenta – strömningstentan! – närmar sig och tänker att de här måtten borde räcka för att beräkna isens densitet, men hur gör man? Hjälp henne att beräkna iskubens densitet! (10p)

P2. Olivolja pumpas upp i en bassäng med hjälp av ett roterande transportband, enligt nedanstående figur. Bandet har hastigheten 5 m/s och bredden 1 m.




Höjdskillnaden mellan bassängerna är 5 m och transportbandet lutar 30°. Om flödet i spalten under transportbandet är laminärt, och spalthöjden är 10 mm hur stort blir då volymflödet?

$\rho = 915$ kg/m$^3$, $\mu = 0.09$ Ns/m$^2$ (10p)

P3. En rak horisontell ventilationskanal med kvadratiskt tvärsnitt har längden 250 m och tvärsnittsytan 1,0 $m^2$. Trycket vid inloppet är 102,0 kPa och vid utloppet 100,0 kPa. Volymflödet är 15 $m^3/s$. Luftens temperatur är 20°C. I ventilationsledningens utlopp placeras ett inblåsningsgaller, vars engångsförlustkoefficient är 3,0. Hur stort blir volymflödet om förhållandena i övrigt är oförändrade? (10p)

P4. Två nyutexaminerade civilingenjörer från Maskinteknik på Chalmers får i uppdrag av sin chef att bestämma vilken ytfinhet två, långa, raka rör skall ha för att kunna betraktas som hydrauliskt släta.

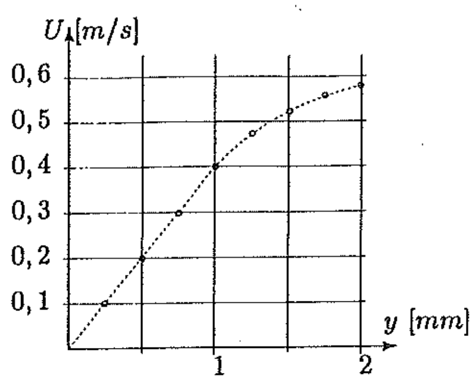
För att ett rör skall kunna betraktas som hydrauliskt slätt (d.v.s. att ytskrovligheter inte påverkar strömningen) får skrovligheten maximalt vara fyra viskösa längdenheter, d.v.s. mindre än det viskösa underskiktets tjocklek. Den viskösa längdenheten, $\ell$, definieras som

$\ell = \frac{\nu}{u^*}$, där $\nu$ = kinematiska viskositeten och $u^*$ = friktionshastigheten

Civilingenjörerna delar upp arbetet och får fria händer att själva bestämma hur de skall arbeta. Tyvärr slutför ingenjörerna inte sina uppgifter, utan konjunkturen vänder och de får välbetalda arbeten på en konsultbyrå. Detta betyder att deras gamla chef sitter med nedanstående uppgifter om rören:

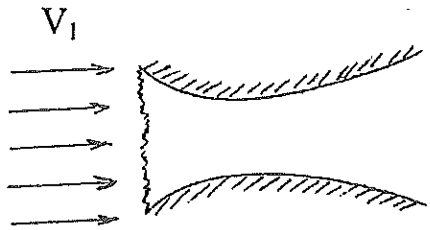
Rör 1: *"Jag investerade i en manometer och mätte upp tryckfallet till 1,10 Pa/m. Röret har dimensionen 0,1 m."*

Rör 2: *"Jag köpte ett LDA-mätsystem och mätte upp följande hastighetsprofil nära rörväggen:"*



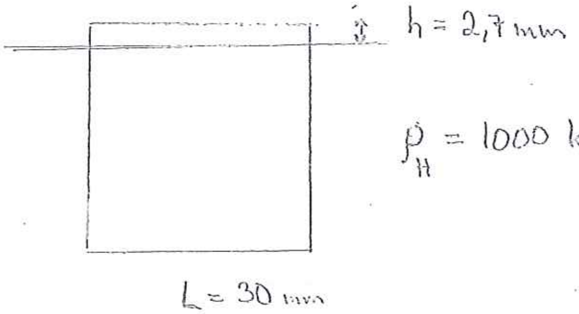

Hjälp den stackars chefen att räkna ut hur stort "fyra viskösa längdenheter" är i de respektive rören. Mediet är i båda fallen luft vid 20°C. (10p)

P5. Då luft inströmmar i en dysa enligt figur bildas en rak stöt i inloppet. I utloppssektionen uppmätes hastigheten 550 m/s, statiska trycket 80 kPa och totaltemperaturen 450 K. Areorna vid in- och utlopp är lika stora. Bestäm anströmningshastigheten $V_1$.




(10p)

MTF052 Strömningsmekanik 30/10-15




$\rho_H = 1000\ kg/m^3$

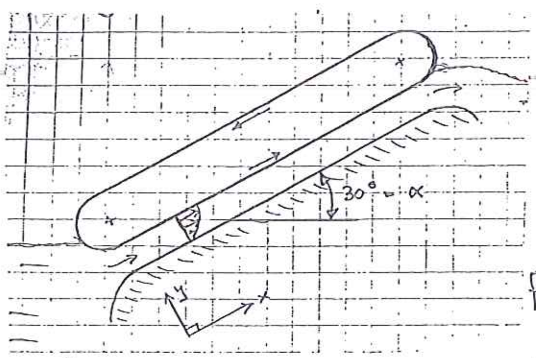
Kraftbalans:

$$\rho_{is} L^2 g - \rho_H L^2 (L-h) g = 0$$

$$\rho_{is} L - \rho_H (L-h) = 0$$

$$\rho_{is} = \rho_H \frac{L-h}{L} = \frac{1000(0{,}030-0{,}0027)}{0{,}030} = \underline{\underline{910\ kg/m^3}}$$

---




NS. i x-led: (stationärt, 2-dim)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g_x$$

Fullt utbildat: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow v = 0$

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \Rightarrow 0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_x$ ; men $u = u(y)$, $g_x = -g\sin$

$\therefore \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{g}{\nu}\sin\alpha \Rightarrow u(y) = \frac{g}{\nu}\sin\alpha \frac{y^2}{2} + Ay + B$

RV: $u(0) = 0$ $u(h) = 5\,m/s \Rightarrow u(y) = 5\frac{y}{h} + \frac{g}{\nu}\sin\alpha\left(\frac{y^2}{2} - \frac{h}{2}y\right)$

Volymflöde: $\dot{V} = \underset{\text{bredd}}{b}\int_0^h u\,dy = b\int_0^h \left[5\frac{y}{h} + \frac{g}{\nu}\sin\alpha\left(\frac{y^2}{2} - \frac{h}{2}y\right)\right] dy =$

$\ldots = b\left(\frac{5h}{2} - \frac{g}{\nu}\sin\alpha\frac{h^3}{12}\right) = \left[\nu = \frac{\mu}{\rho}\right] = 0{,}021\ m^3/s$

**Givet:** $p_1 = 102$ kPa $\quad A = 1\,m^2$

$p_2 = 100$ kPa $\quad Q = 15\,m^3/s$

$L = 250$ m $\quad t = 20°C$

Med galler är $K = 3{,}0$

**Lösning:** B:s utv. ekv (3.68b):

$$p_1 + \rho\frac{V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho\frac{V_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta p_f + \rho w_s$$

$z_1 = z_2$, $V_1 = V_2$, $w_s = 0$

Utan galler är $\Delta p_f = f\frac{L}{d}\rho\frac{V^2}{2}$ $\quad$ ($\cancel{6.80b}$) (6.10b)

$\therefore \Delta p_f = p_1 - p_2 = f\frac{L}{d}\rho\frac{V^2}{2}$

KE $\Rightarrow V = \frac{Q}{A} = 15$ m/s

Kvadratiskt rör: $d_h = \frac{4A}{P} = 1$ m

$$f = \frac{(p_1 - p_2)\, d_h \cdot 2}{L\rho V^2} = 0{,}059$$

$Re = \frac{V d_h}{\nu} = 9{,}87 \cdot 10^5 > 2300$ $\therefore$ turbulent

Relativa skrovligheten $\varepsilon/d$ fås ur Moody-diagram

$\left.\begin{matrix} f = 0{,}059 \\ Re = 9{,}87\cdot 10^5 \end{matrix}\right\}$ $\frac{\varepsilon}{d_h} = 0{,}032$, och vi är till höger om linjen där f ober av Re.

Antag att vi fortfarande är i omr där f ober av Re efter att gallret satts dit. (kollas sedan) $\Rightarrow$

$$p_1 - p_2 = f\frac{L}{d_h}\cdot\rho\frac{V^2}{2} + K\rho\frac{V^2}{2}$$

$\Rightarrow V = 13{,}7$ m/s

Kolla om f ändrats:

$Re = \frac{V d_h}{\nu} = 9{,}02\cdot 10^5$

Moodydiagram ger att Re fortfarande är så stort att f är oberoende av Re

$\therefore$ Antagandet var OK

$Q = V\cdot A = 13{,}7\cdot 1 = 13{,}7\ m^3/s$

Svar: $Q = 13{,}7\ m^3/s$

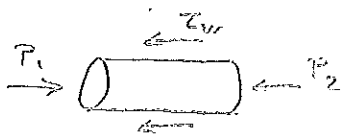
---

P1.

Medlet är luft, $20°C \overset{(A.2)}{\Rightarrow} \begin{cases} \rho = 1{,}2\ kg/m^3 \\ \nu = 1{,}5\cdot 10^{-5}\ m^2/s \end{cases}$

Rör 1:

Ställ upp kraftjämvikt:




($\Delta p$ - givet per meter!)

$\rightarrow$: $(p_1 - p_2)\frac{\pi d^2}{4} = \pi d\cdot L\cdot \tau_w$

$\Rightarrow \tau_w = \frac{\Delta p}{L}\cdot\frac{d}{4} = 1{,}1\cdot\frac{0{,}1}{4}\ N/m^2$

$= 0{,}0275\ N/m^2$

$\Rightarrow u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 0{,}151$ m/s

$\Rightarrow$ Den viskösa längdskalan:

$l = \frac{\nu}{u^*} = 0{,}1$ mm

$\therefore 4l = \underline{\underline{0{,}4\text{ mm}}}$

Rör 2:

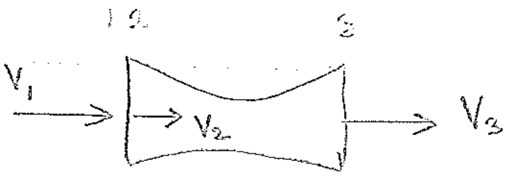
$$\tau_w = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \rho\nu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} =$$

$= 1{,}2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot\frac{0{,}4}{1\cdot 10^{-3}} = 7{,}2\cdot 10^{-3}\ N/m^2$

$\Rightarrow u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 0{,}077$ m/s

$\Rightarrow l = \frac{\nu}{u^*} = 0{,}2$ mm

$\Rightarrow 4l = \underline{\underline{0{,}8\text{ mm}}}$




<u>Givet</u>: $V_3 = 550$ m/s
$p_3 = 80$ kPa
$T_{03} = 450$ K
$A_2 = A_3$

<u>Sökt</u>: $V_1$

<u>Lösning</u>

EE (9.23) $\Rightarrow$ $T_3 = T_{03} - \dfrac{V_3^2}{2c_p} = 450 - \dfrac{550^2}{2\cdot 1005} = 300$ K $\Rightarrow$ $\dfrac{T_3}{T_{03}} = 0{,}667$

Tabell B1 $\Rightarrow$ $\dfrac{A_3}{A_3^*} = 1{,}2344$ Här är $A_2 = A_3$. Mellan 2 o 3 är strömningen isentrop $\Rightarrow$ $A_2^* = A_3^*$

$\therefore$ $\dfrac{A_2}{A_2^*} = 1{,}2344$, I snitt 2, efter stöten, är $Ma < 1$, Tabell B1 $\Rightarrow$ $Ma_2 = 0{,}564$

Tabell B2 $\Rightarrow$ $Ma_1 = 2{,}08$. Adiabatiskt $\Rightarrow$ $T_{01} = T_{02} = T_{03} = 450$ K.

Ekv(9.34) $\Rightarrow$ $T_1 = \dfrac{T_{01}}{1+0{,}2Ma_1^2} = 241$ K. $V_1 = Ma_1 \cdot a_1 = 2{,}08\sqrt{\kappa R T_1} = 2{,}08\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 241} = \underline{\underline{648 \text{ m/s}}}$